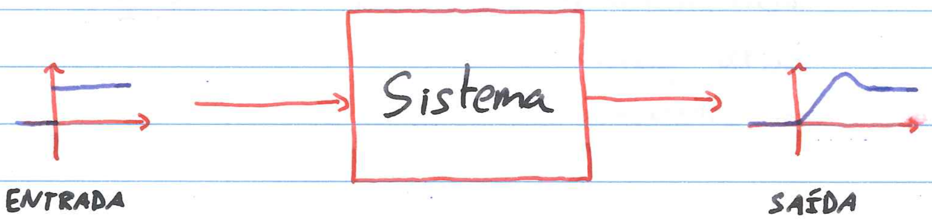
Análise de Resposta Transitória

Utilizando alguns sinais de teste bem conhecidos na entrada de um sistema, podemos verificar características analisando o sinal de saída.

A especificação de desempenho de sistemas de controle muitas vezes é feita a partir da resposta desejada a um sinal de entrada específico. Assim, pode-se comparar de forma clara o desempenho de diferentes sistemas.



Sinais de teste típicos são:

Degrau, rampa, impulso, senoidal, etc.

Qual sinal de teste fornece melhores informações?

Isto dependerá do sistema em si e de seu regime de operação.

Resposta Temporal

A resposta temporal de um sistema pode ser decomposta em duas partes:

Resposta transitória: estado inicial → estado final
Resposta estacionária: resposta quando $t \to \infty$.

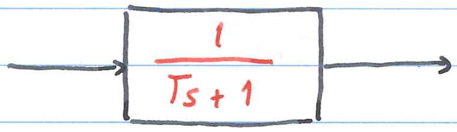
Critérios:

- Estabilidade absoluta → Para um sistema linear, se a saída retorna para seu estado de equilíbrio após ~~a~~ ser submetido a uma condição inicial, então se diz que o sistema é <u>estável</u>.
- Estabilidade relativa
- Erro estacionário

Desconsiderando efeitos físicos com saturação.

Sistemas de Primeira Ordem

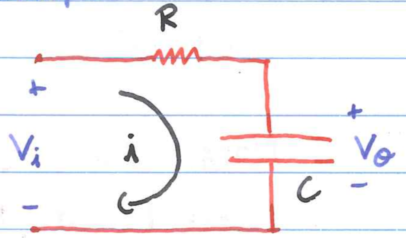
Considere os sistemas formados por apenas 1 polo:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

Note que vários sistemas físicos podem ser matematicamente representados por essa função de transferência.

Exemplo:



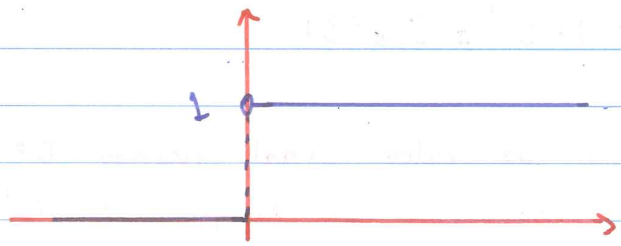
$$i = \frac{V_i}{(R + 1/sC)}$$

$$V_o = \frac{1}{sC} \cdot V_i = \frac{V_i}{sRC + 1}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = G(s) = \frac{1}{sRC+1}$$

Resposta ao Degrau Unitário

Chama-se degrau unitário a seguinte função:



$$U(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

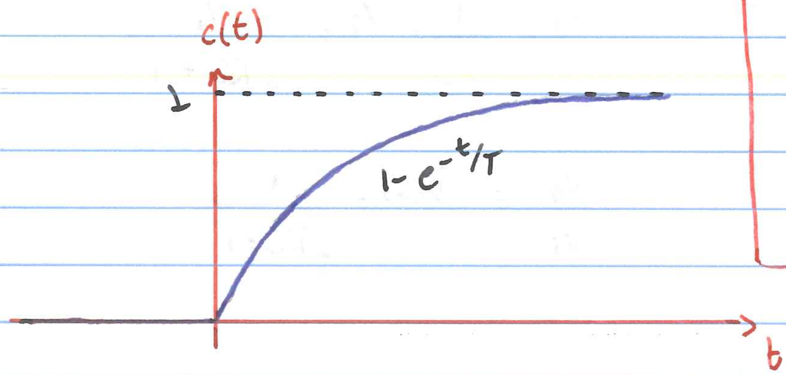
Para o sistema de primeira ordem, temos a seguinte resposta temporal a um degrau unitário:

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} R(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1/T}\right\}$$

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad t \geq 0$$



NOTA: O erro é

$e(t) = 1 - c(t), \; t \geq 0$

$e(t) = e^{-t/T}$

Note que:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$$

Propriedades

1) Se $t = T$, $c(T) = 1 - e^{-1} = 0{,}6321$

$c(t)$ atinge 63,2% do valor final quando $t = T$. Assim, T é chamado de constante de tempo do sistema.

2) $\frac{d}{dt} c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, $\left.\frac{d}{dt} c(t)\right|_{t=0} = \frac{1}{T}$

A inclinação inicial da curva é o inverso da constante de tempo.

3) Valores da função

Instante	Valor (% do valor de regime)
0	0
T	63,2%
2T	86,5%
3T	95 %
4T	98,2%
5T	99,3%

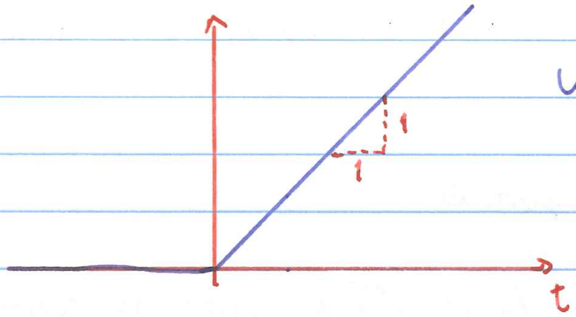
Note que para $t \geq 4T$ a resposta fica com menos de 2% do valor de regime. Por isso, é usual falar que o sistema atingiu o regime após 4 constantes de tempo.

4) Teste de linearidade

Se a curva ~~log~~ $\ln |c(t) - c(\infty)|$ for uma reta, então o sistema tem um comportamento ~~linear~~. de um sistema de primeira ordem.

Resposta à Rampa Unitária

Chama-se de rampa unitária a seguinte função



$$u(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$U(s) = \frac{1}{s^2}$$

Para um sistema de primeira ordem, temos a seguinte resposta à rampa unitária:

$$C(s) = \frac{1}{sT+1} R(s) = \frac{1}{sT+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left[s^2 \cdot \frac{1}{s^2(sT+1)} \right]\Bigg|_{s=0}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T^2}{Ts+1}\right\}$$

$$\Downarrow \quad \frac{T}{s+\frac{1}{T}}$$

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}$$

$$c(t) = t - T(1 - e^{-t/T}), \quad t \geq 0$$

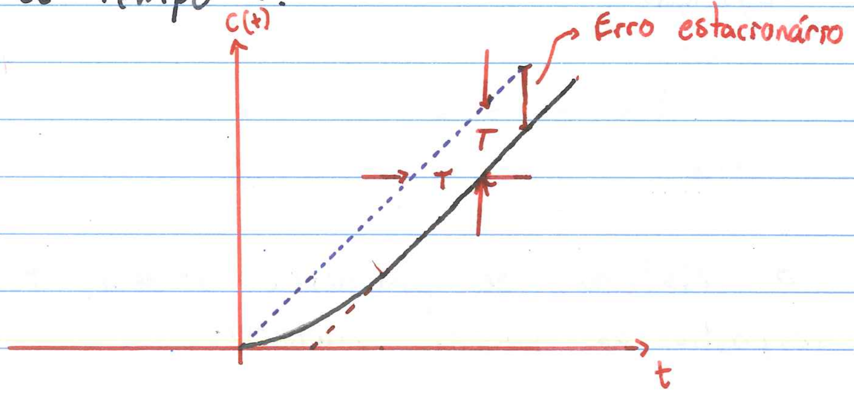
O erro entre a entrada e a saída é:

$$e(t) = r(t) - c(t),$$
$$= t - t + T(1 - e^{-t/T})$$
$$e(t) = T(1 - e^{-t/T})$$

Então, note que:

$$e(0) = 0$$
$$\lim_{t \to \infty} e(t) = T$$

Com isso, um sistema de primeira ordem excitado por uma rampa unitária fornecerá na saída um sinal, em regime, com erro constante e igual a sua constante de tempo T.



Nota: A derivada da rampa unitária é o degrau unitário. Note que:

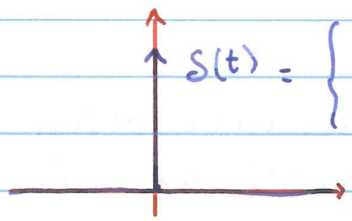
$$\frac{d}{dt} c(t) = \frac{d}{dt}\left(t - T(1 - e^{-t/T})\right) = 1 - \frac{T}{T} e^{-t/T} = 1 - e^{-t/T}$$

Resposta ao degrau unitário

Isso é verdade pois o sistema é LINEAR e INVARIANTE NO TEMPO.

Resposta ao Impulso Unitário

O impulso unitário é representado pelo ~~delta~~ delta de Dirac $\delta(t)$:



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Nota: Rigorosamente, não é uma função.

$$\delta(s) = 1$$

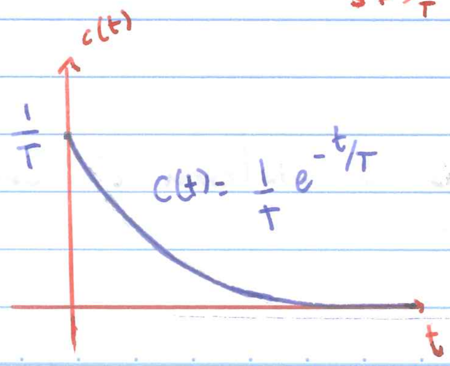
Por definição:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Para o sistema de primeira ordem, temos a seguinte resposta ao impulso unitário:

$$C(s) = \frac{1}{sT+1} \cdot R(s) = \frac{1}{sT+1} \cdot 1$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ C(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \underbrace{\frac{1}{sT+1}}_{= \frac{1/T}{s + 1/T}} \right\} = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$



NOTA: o impulso unitário pode ser escrito como a derivada do degrau unitário. Seja $c_d(t)$ a resposta de um sistema de primeira ordem ao degrau unitário. Então, note que:

$$\frac{d}{dt}c_d(t) = \frac{d}{dt}\left(1-e^{-t/T}\right) = \frac{1}{T}e^{-t/T}$$

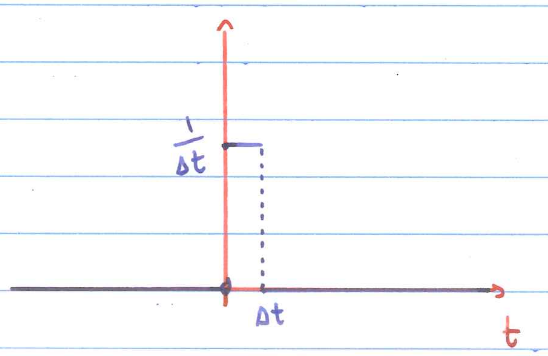
$\Downarrow$

resposta ao impulso

Mais uma vez, isso ocorre pois o sistema é LINEAR e INVARIANTE NO TEMPO.

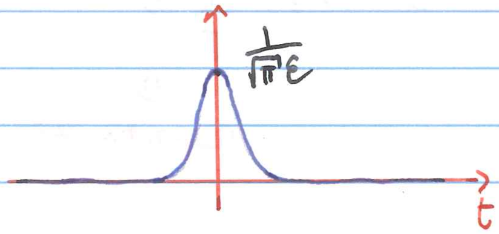
NOTA: Para simular numericamente o sinal impulso unitário, pode-se utilizar diversos métodos.

1) $\delta(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} F_{\Delta t}(t)$, $\quad F_{\Delta t}(t) = \begin{cases} 1/\Delta t, & 0 \leq t \leq \Delta t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$



2) $\cancel{\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon}}$

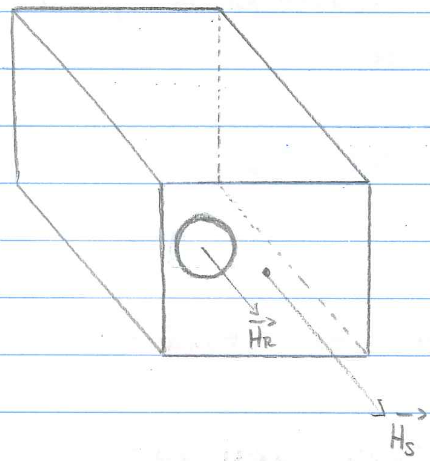
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{\varepsilon^2}}$$



O importante é que a area das funções seja 1!

Exemplo: Sistemas de Primeira Ordem

Controle de velocidade angular de um satelite em 1 eixo.



Pela conservação do momento angular

$$\dot{H}_R + \dot{H}_S = 0$$

$$\dot{H}_S = -\dot{H}_R$$

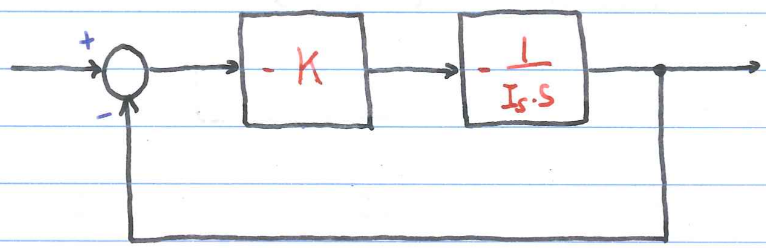
$$I_S \dot{\omega}_S = -T_R$$

$$\Downarrow$$

$$I_S s W_S = -T_R$$

$$\frac{W_S}{T_R} = -1 \cdot \frac{1}{I_S \cdot S}$$

Malha de controle:



Com isso, a função de transferência será:

$$G(s) = \frac{\frac{K}{I_S S}}{1 + \frac{K}{I_S S}} = \frac{K}{I_S S + K} = \frac{1}{\frac{I_S}{K} s + 1}$$

Utilizando os valores do Amazonia-1,

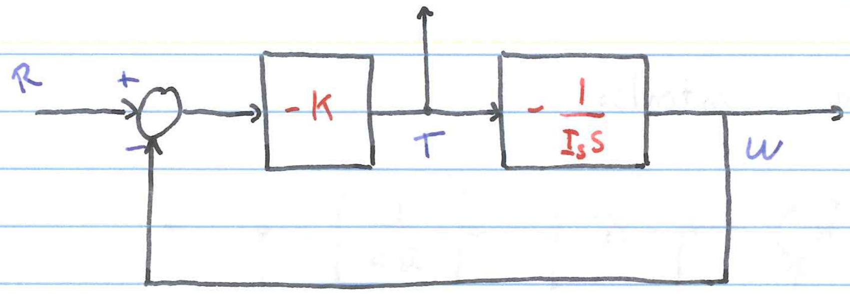
$I_s = 530 \ kg.m^2$ (eixo z)
$K = 39,2$

temos que o tempo de acomodação para um comando de velocidade é de:

$$4T = 4.\frac{I_s}{K} = 4.\frac{530}{39,2} = 54,08 \, s$$

Nota: Desconsiderando limitações do atuador!

Para obter o valor do torque aplicado:



$$H(s) = \frac{T(s)}{R(s)} = \frac{-K}{1 + \frac{K}{I_s S}} = \frac{-K I_s s}{I_s S + K} = \frac{-I_s . S}{\frac{I_s}{K} s + 1}$$