Sistemas de Segunda Ordem

São sistemas que possuem dois pólos. Em geral, a função de transferência pode ser escrita como:

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}} \longrightarrow C(s) \qquad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

Sistemas como um servosistema ou um sistema massa-mola podem ser representados nessa forma.

Resposta ao Degrau Unitário

Primeiramente, vamos analisar os pólos da função de transferência:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$\Delta = 4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2 = 4\omega_n^2\left(\sqrt{\xi^2-1}\right)^2$$

$$s = \frac{-2\xi\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}}{2}$$

$$s = \frac{\cancel{2}\omega_n}{\cancel{2}}\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2-1}\right) = \omega_n\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2-1}\right)$$

Caso 0: $\xi < 0$

a) Se $-1 < \xi < 0$, então $\sqrt{\xi^2-1}$ é puramente imaginário. Logo, a parte real dos polos é $-\xi$. Com $-\xi > 0$, o sistema é instável.

b) Se $\xi < -1$, então $\sqrt{\xi^2-1}$ é real e sempre existirá uma raiz positiva $(-\xi + \sqrt{\xi^2-1} > 0)$.

<u>Conclusão</u>: Se $\xi < 0$, o sistema sempre será INSTÁVEL.

Caso 1: $0 < \xi < 1$

Nesse caso, $\xi^2 - 1 < 0$ e as raízes serão complexas conjugadas.

$$s = \frac{\cancel{2}\omega_n}{\cancel{2}}\left(-\xi \pm j\sqrt{\underbrace{1-\xi^2}_{>0}}\right) = -\omega_n \xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n$$

$$s_1 = -\omega_n \xi + j\underbrace{\boxed{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}}_{\omega_d} \qquad s_2 = -\omega_n \xi - j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n$$

A resposta ao degrau unitário pode ser obtida como se segue:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot R(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + j\omega_d)(s + \xi\omega_n - j\omega_d)\,s}$$

Separando em frações parciais:

$$\cancel{C(s) = \frac{1}{2} + \frac{\omega_n}{2\xi(\xi\omega_n + j\omega_d)} \cdot \frac{1}{s + \xi\omega_n + j\omega_d} + \frac{\omega_n}{2\xi(\xi\omega_n - j\omega_d)}}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{\omega_n^2}{2j\omega_d(\zeta\omega_n + j\omega_d)} \cdot \frac{1}{s+\zeta\omega_n + j\omega_d} - \frac{\omega_n^2}{2j\omega_d(\zeta\omega_n - j\omega_d)} \cdot \frac{1}{s+\zeta\omega_n - j\omega_d}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{j\cancel{\omega_n^2}(\zeta\omega_n - j\omega_d)}{2\omega_d \cdot \cancel{\omega_n^2}} \frac{1}{s+\zeta\omega_n+j\omega_d} + \frac{j\cancel{\omega_n^2}(\zeta\omega_n + j\omega_d)}{2\omega_d \cancel{\omega_n^2}} \frac{1}{s+\zeta\omega_n - j\omega_d}$$

$$= \frac{1}{s} - j\frac{(\zeta\omega_n - j\omega_d)}{2\omega_d} \frac{1}{s+\zeta\omega_n+j\omega_d} + j\frac{(\zeta\omega_n + j\omega_d)}{2\omega_d} \frac{1}{s+\zeta\omega_n-j\omega_d}$$

A transformada inversa de Laplace fornece:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\zeta\omega_n+j\omega_d}\right\} = e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_d)t} = e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) - j\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\zeta\omega_n-j\omega_d}\right\} = e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_d)t} = e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + j\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right)$$

Além disso, note que:

$$-j\frac{(\zeta\omega_n - j\omega_d)}{2\omega_d} \cdot e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos(\omega_d t) - j\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right] +$$
$$j\frac{(\zeta\omega_n + j\omega_d)}{2\omega_d} \cdot e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + j\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right)$$

$$= j^2 \frac{\cancel{2\omega_d}}{\cancel{2\omega_d}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) + j^2 \frac{\cancel{2}\zeta\omega_n}{\cancel{2}\omega_d} \mathrm{sen}(\omega_d t)$$

$$= -e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t) - \boxed{\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}}\, \mathrm{sen}(\omega_d t)$$

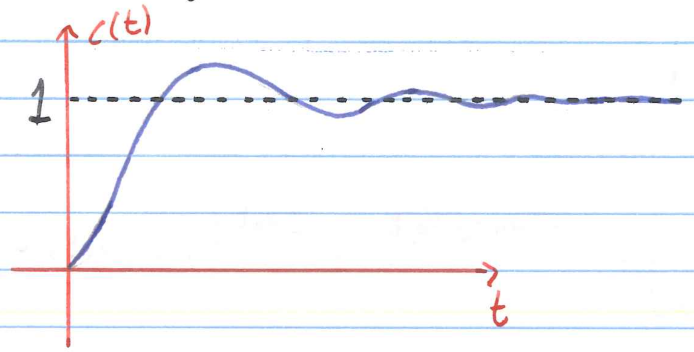
$$\rightarrow \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Portanto:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\text{sen}(\omega_d t)\right), t \geq 0$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\text{sen}\left(\omega_d t + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)$$

Temos que $\lim_{t\to\infty} c(t) = 1$. Portanto, o erro em regime para entrada degrau unitário é nulo.



Note que:

a) Se $\zeta = 0$, então $c(t) = 1 - \cos(\overset{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \omega_n}{\omega_d} t) = 1 - \cos(\omega_n t)$. Então a saída terá oscilações com amplitude constante e frequência ω_n.

b) Se $\zeta \to 1$, então:

$$c(t) = \lim_{\zeta\to 1} 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\text{sen}(\omega_d t)\right)$$

$$= 1 - e^{-\omega_n t}\left(1 + \lim_{\zeta\to 1}\frac{\text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

OBS: $\lim_{\xi \to 1} \frac{\text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t)}{\sqrt{1-\xi^2}} = \lim_{\xi \to 1} \frac{\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t) \cdot \frac{\cancel{-\xi}\,\omega_n t}{\cancel{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\frac{\cancel{-\xi}}{\cancel{\sqrt{1-\xi^2}}}}$

$= \lim_{\xi \to 1} \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\,t) \cdot \omega_n t = \omega_n t$

$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t).$

Então a saída não possuirá oscilações.

Com isso, podemos fornecer um significado físico para as variáveis ξ, ω_n e ω_d.

- ξ: Coeficiente de amortecimento, pois aumentá-lo faz com que as oscilações tenham a amplitude ~~diminuida~~ e frequência diminuídas.

- ω_d: Frequência natural amortecida. É a frequência em que o sistema oscila dado um ~~fator~~ coeficiente de amortecimento.

- ω_n: Frequência natural não-amortecida. É a frequência que o sistema oscilaria caso fosse possível remover o amortecimento. Na prática, essa frequência não se observa se $\xi \neq 0$.

NOTA: $\omega_d < \omega_n, \ \forall \xi \in (0,1)$

$\rightarrow$ O caso $0 < \xi < 1$ é chamado de subamortecido.

~~Caso 1: $\xi \neq 1$~~

Caso 2: $\xi = 1$

Nesse caso, $\xi^2 - 1 = 0$ e as raízes serão reais e iguais.

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

A resposta ao degrau unitário pode ser obtida como se segue:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} R(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2 s}$$

Separando em frações parciais:

$$C(s) = \frac{-\omega_n}{(s+\omega_n)^2} - \frac{1}{s+\omega_n} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{d}{ds}\left[(s+\omega_n)^2 \cdot \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2 \cdot s} \right] \Bigg|_{s=-\omega_n}$$

Com isso:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\omega_n}\right\} - \omega_n \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\omega_n)^2}\right\}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$$

tilibra

Temos que

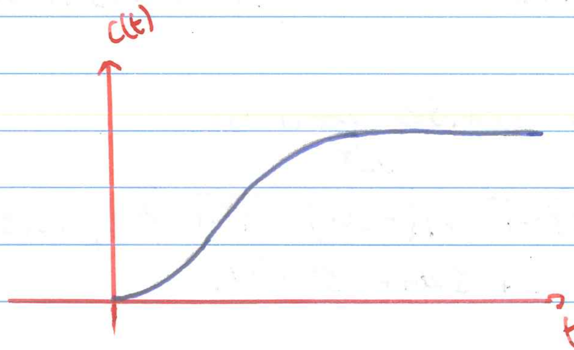
$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty} 1 - \lim_{t\to\infty} e^{-\omega_n t} - \lim_{t\to\infty} e^{-\omega_n t} . \omega_n . t$$

$$= 1 - 0 - \lim_{t\to\infty} \frac{\omega_n t}{e^{\omega_n t}}$$

$$= 1 - 0 - \lim_{t\to\infty} \frac{\cancel{\omega_n}}{\cancel{\omega_n} e^{\omega_n t}}$$

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = 1$$

Logo também não existe erro em regime para esse caso.



NOTA: $\left.\frac{d}{dt} c(t)\right|_{t=0} = \left.\left(\cancel{\omega_n e^{-\omega_n t}} - \cancel{\omega_n e^{-\omega_n t}} + \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \right)\right|_{t=0}$

$$= \left.\left(\omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \right)\right|_{t=0} = 0$$

→ O caso $\xi = 1$ é chamado criticamente amortecido pois qualquer diminuição no amortecimento ocasionará oscilações na saída.

Caso 3: $\zeta > 1$

Nesse caso, $\zeta^2 - 1 > 0$ e as raízes são reais e distintas:

$$s_1 = -\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2-1}\,.\,\omega_n \qquad s_2 = -\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2-1}\,.\,\omega_n$$

Nota: $s_2 > 0$ pois $\zeta > \sqrt{\zeta^2-1}$ $\forall\, \zeta > 1$. Logo, o sistema é sempre estável.

A resposta ao degrau unitário pode ser obtida como se segue:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n+\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n)(s+\zeta\omega_n-\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n)s}$$

Separando em frações parciais:

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{\dfrac{\cancel{\omega_n^2}}{(-2\sqrt{\zeta^2-1}\,\cancel{\omega_n})(-\zeta\cancel{\omega_n}-\sqrt{\zeta^2-1}\,\cancel{\omega_n})}}{s+\zeta\omega_n+\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n} + \frac{\dfrac{\cancel{\omega_n^2}}{(2\sqrt{\zeta^2-1}\,\cancel{\omega_n})(-\zeta\cancel{\omega_n}+\sqrt{\zeta^2-1}\,\cancel{\omega_n})}}{s+\zeta\omega_n-\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\,(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}\cdot\frac{1}{s+\zeta\omega_n+\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\,(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}\cdot\frac{1}{s+\zeta\omega_n+\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n}$$

Com isso:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\,(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}\cdot e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\,(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}\cdot e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$

$$= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\cdot\left(\frac{e^{+s_1 t}}{s_1} + \frac{e^{+s_2 t}}{s_2}\right)$$

Adicionalmente, note que:

$$\omega_n^2 = s_1 . s_2$$
$$2\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_n = s_2 - s_1$$

Então, podemos escrever:

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n^2}{2\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_n}\left(-\frac{e^{s_1 t}}{s_1} + \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\right)$$

$$c(t) = 1 + \frac{s_1 . s_2}{s_2 - s_1}\left(-\frac{e^{s_1 t}}{s_1} + \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\right)$$

Se $|s_1| >>> |s_2|$, então:

- $s_2 - s_1 \approx -s_1$

- $-\frac{e^{s_1 t}}{s_1} + \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \approx \frac{e^{s_2 t}}{s_2}$

Com isso:

$$c(t) \approx 1 + \frac{\cancel{s_1}\,\cancel{s_2}}{(-\cancel{s_1})} . \frac{e^{s_2 t}}{\cancel{s_2}}$$

$$c(t) \approx 1 - e^{s_2 t} = 1 - e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}$$

Que é a mesma resposta do sistema de primeira ordem:

$$G(s) = \frac{-s_2}{s - s_2} = \frac{\xi\omega_n - \sqrt{\xi^2-1}\,\omega_n}{s + \xi\omega_n - \sqrt{\xi^2-1}\,\omega_n}$$

Se $|s_1| \ggg |s_2|$, então o polo s_1 tem dinâmica muito rápida e pouco influencia na resposta, podendo ser desprezado.

Definição de Especificações de Regime Transitório

Usualmente, a especificação do regime transitório para um sistema de controle é feita através das seguintes variáveis: baseadas na resposta do sistema ao degrau unitário:

- **Tempo de atraso (t_d)**

  Tempo necessário para a saída alcançar pela primeira vez 50% do valor de regime.

- **Tempo de subida (t_r)**

  Tempo necessário para saída ~~atingir~~ ir de
  10% a 90% -> 2ª ordem, superamortecidos
  5% a 95%
  0% a 100% -> 2ª ordem, subamortecidos
  do valor de regime.

- **Instante de pico (t_p)**

  Tempo necessário para que a resposta alcance o primeiro pico de ultrapassagem.

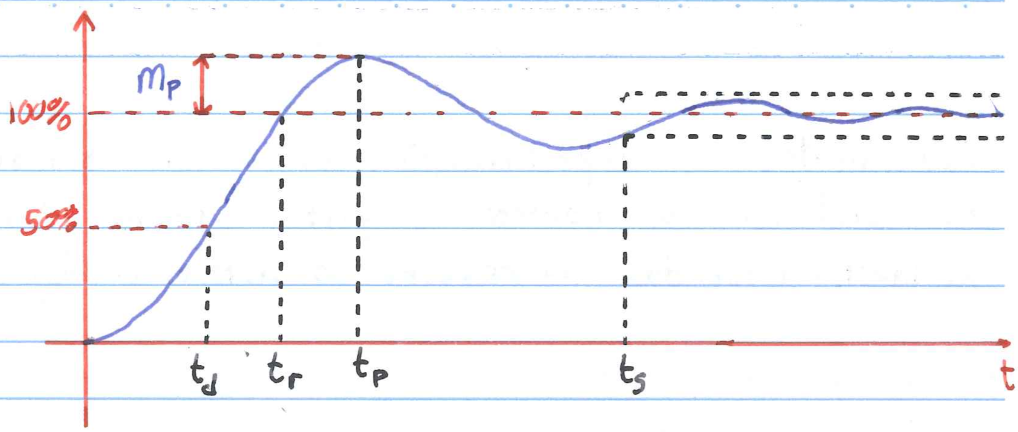
- **Máxima ultrapassagem (M_p)**

  Máximo valor de pico da curva medido a partir de sua resposta em regime:

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

- **Tempo de acomodação (t_s)**

  Tempo necessário para que a curva fique sempre dentro de uma faixa em torno do valor de regime.
  ↳ Normalmente, 2% ou 5%.



Mp
100%
50%
td
tr
tp
ts
t

Sistemas de Segunda Ordem e Especificações de Resposta Transitória

Dado um sistema de segunda ordem padrão, veremos como os parâmetros mostrados podem ser calculados.
Iremos supor que o sistema é subamortecido ($0 < \xi < 1$).

Tempo de Subida (t_r)

$$c(t_r) = 1$$

$$1 - e^{\xi \omega_n t_r}\left(\cos(\omega_d t_r) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t_r)\right) = 1$$

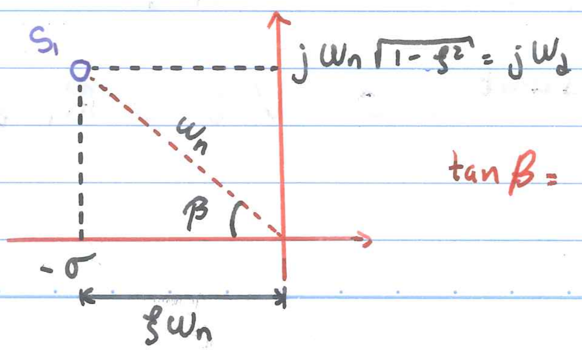
$$\underbrace{e^{\xi \omega_n t_r}}_{\neq \, \forall t_r \in \mathbb{R}}\left(\cos(\omega_d t_r) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t_r)\right) = 0$$

$$\therefore \cos(\omega_d t_r) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t_r) = 0$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\omega_d t_r)}{\cos(\omega_d t_r)} = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\tan(\omega_d t_r) = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \cdot \frac{\omega_n}{\omega_n} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \omega_d \\ \Rightarrow \sigma \end{matrix}$$

Note que:



$$\tan \beta = \frac{\omega_d}{\sigma}$$

$$\tan(\omega_d t_r) = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\,\mathrm{atan}\left(\frac{\omega_d}{-\sigma}\right) = \frac{\pi-\beta}{\omega_d}$$

$$t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} = \frac{\pi-\beta}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}$$

Instante de pico (t_p)

O instante de pico t_p pode ser encontrado ~~maximizando~~ buscando o instante t que maximiza $c(t)$.

Para isso, tem-se:

$$\frac{dc(t)}{dt} = +\xi\omega_n \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right) e^{-\xi\omega_n t} - \left(-\omega_d\,\mathrm{sen}(\omega_d t) + \frac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(\omega_d t)\right) e^{-\xi\omega_n t}$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = +\xi\omega_n \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right) \overbrace{e^{-\xi\omega_n t}}^{>0} + \left(\omega_d\,\mathrm{sen}(\omega_d t) - \frac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(\omega_d t)\right) \underbrace{e^{-\xi\omega_n t}}_{>0}$$

Como $e^{-\xi\omega_n t} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, então:

$$\frac{d}{dt}\,c(t) = 0 \iff$$

$$\xi\omega_n\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\text{sen}(\omega_d t)\right) + \left(\omega_d\,\text{sen}(\omega_d t) - \frac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(\omega_d t)\right) = 0$$

NOTA: $\dfrac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = \dfrac{\xi\,\omega_n\cancel{\sqrt{1-\xi^2}}}{\cancel{\sqrt{1-\xi^2}}} = \xi\omega_n$

Portanto:

$$\left(\frac{\xi^2\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} + \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n\right)\text{sen}(\omega_d t) = 0$$

$$\left(\frac{\xi^2\omega_n + (1-\xi^2)\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\text{sen}(\omega_d t) = 0$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}}}_{>0}\,\text{sen}(\omega_d t) = 0 \implies \text{sen}(\omega_d t) = 0$$

Então, os pontos críticos de $c(t)$ serão:

$$t_{CRITICOS} = \left[\,t \mid \text{sen}(\omega_d t) = 0,\ t \geq 0\,\right]$$

$$t_{CRITICOS} = \left[0, \frac{\pi}{\omega_d}, \frac{2\pi}{\omega_d}, \frac{3\pi}{\omega_d}, \dots\right]$$

$$t_{CRITICOS} = \left[n\cdot\frac{\pi}{\omega_d},\ n \in \mathbb{N}\right]$$

/ /

Pelo formato da curva $c(t)$, fica claro que o instante de pico t_p equivale ao segundo ponto crítico. Por isso:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \cancel{\frac{\pi}{\omega_d}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

Máximo Valor de Ultrapassagem (M_p)

Por definição, é o valor da resposta no instante de pico t_p relativo ao valor de regime $c(\infty)$.

$$M_p = \frac{c(t_p) - \boxed{c(\infty)}^{=1}}{\boxed{c(\infty)}_{=1}}$$

$$M_p = \cancel{1} - e^{-\xi\omega_n t_p}\left(\overset{=-1}{\cos(\underbrace{\omega_d t_p}_{\pi})} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\cancel{\overset{0}{\text{sen}}(\underbrace{\omega_d t_p}_{\pi})}\right) - \cancel{1}$$

$$M_p = e^{-\overset{\sigma}{\boxed{\xi\omega_n}}\cdot\frac{\pi}{\omega_d}} \cdot 1 = e^{-\pi\frac{\sigma}{\omega_d}}$$

$$M_p = \exp\left(-\frac{\xi\cancel{\omega_n}\pi}{\cancel{\omega_n}\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\frac{\sigma}{\omega_d}\cdot\pi}$$

tilibra

Tempo de acomodação

Por conveniência, define-se:

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad \text{(critério de 2\%)}$$

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad \text{(critério de 5\%)}$$

Essas aproximações são válidas para $0 < \zeta < 0.9$.

Resposta ao Impulso Unitário

Nesse caso temos:

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2} \cdot R(s) = \frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$$

Caso 1: $0 \leqslant \xi < 1$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{(s+\xi w_n + j\sqrt{1-\xi^2}\,w_n)(s+\xi w_n - j\sqrt{1-\xi^2}\,w_n)}$$

$$C(s) = \frac{w_n^{\cancel{2}}}{(-j2\sqrt{1-\xi^2}\,\cancel{w_n})} \cdot \frac{1}{s+\xi w_n + j\sqrt{1-\xi^2}\,w_n} + \frac{w_n^{\cancel{2}}}{(+j2\sqrt{1-\xi^2}\,\cancel{w_n})} \cdot \frac{1}{s+\xi w_n - j\sqrt{1-\xi^2}\,w_n}$$

$$C(s) = \frac{w_n j}{2\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{1}{s+\xi w_n + j\sqrt{1-\xi^2}\,w_n} + \frac{(-w_n j)}{2\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{1}{s+\xi w_n - j\sqrt{1-\xi^2}\,w_n}$$

$$C(s) = \frac{w_n}{2\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \left[\frac{j}{s+\xi w_n + j\sqrt{1-\xi^2}\,w_n} - \frac{j}{s+\xi w_n - j\sqrt{1-\xi^2}\,w_n}\right]$$

Então:

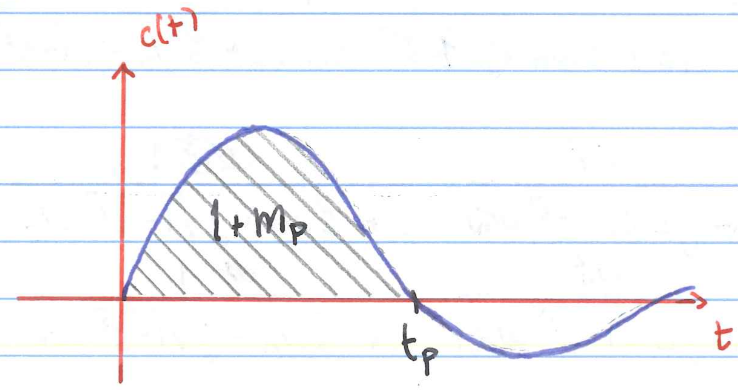
$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} =$$

$$\frac{w_n}{2\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \left[j\,e^{-(\xi w_n + j\sqrt{1-\xi^2}\,w_n)} - j\,e^{-(\xi w_n - j\sqrt{1-\xi^2}\,w_n)}\right]$$

$$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \Big[j \left(\cos(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t) - j\,\mathrm{sen}(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t) \right)$$
$$- j \left(\cos(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t) + j\,\mathrm{sen}(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t) \right) \Big] \cdot e^{-\xi \omega_n t}$$

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\cancel{2}\sqrt{1-\xi^2}} \left[\cancel{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t) \right] e^{-\xi \omega_n t}$$

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi \omega_n t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t)$$



Nota: Como essa ~~curv~~ curva é a derivada da resposta do sistema a uma entrada degrau unitário, podemos obter:

t_p: primeiro cruzamento $c(t) = 0$

M_p: Integral da curva entre 0 e t_p é $1 + M_p$.

Exercício: calcular o instante de pico e máximo valor de ultrapassagem para uma entrada impulso unitário.

Caso 2: $\xi = 1$

Nesse caso:

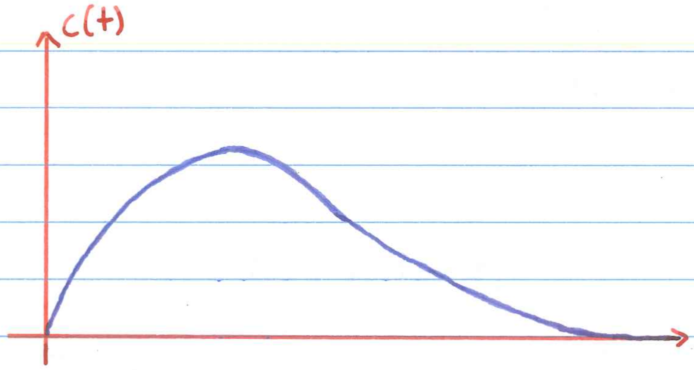
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} R(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

Então:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \Rightarrow c(t) = \omega_n^2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\omega_n)^2}\right\}$$

Portanto:

$$c(t) = \omega_n^2 \cdot t \cdot e^{-\omega_n t}$$



Caso 3: $\xi > 1$

Nesse caso:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)} \cdot R(s) = \frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

Então:

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s_1 - s_2} \frac{1}{s - s_1} + \frac{w_n^2}{s_2 - s_1} \frac{1}{s - s_2}$$

Logo:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = \frac{w_n^2}{s_1 - s_2} \cdot e^{s_1 t} + \frac{w_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t}$$

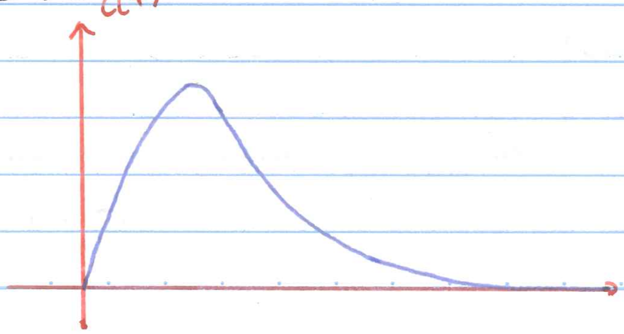
Como:

$$s_1 = -\xi w_n - \sqrt{\xi^2 - 1}\, w_n$$
$$s_2 = -\xi w_n + \sqrt{\xi^2 - 1}\, w_n$$
$$\Downarrow$$
$$s_1 - s_2 = -2\sqrt{\xi^2 - 1}\, w_n$$
$$s_2 - s_1 = +2\sqrt{\xi^2 - 1}\, w_n$$

Finalmente:

$$c(t) = \frac{w_n^2}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})w_n t} - \frac{w_n^2}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})w_n t}$$

Como $e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})w_n t} > e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})w_n t}$, então $c(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.



Nota: observe que, se a resposta ao impulso unitário for sempre positiva então o sistema é necessariamente criticamente amortecido ou super amortecido. Caso contrário, o sistema será subamortecido.