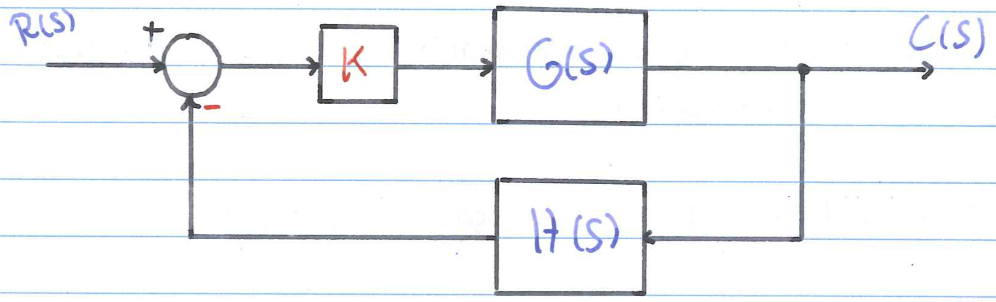
# Lugar Geométrico das Raízes

→ Técnica que consiste em encontrar os locais no plano complexo em que as raízes de um polinômio (que serão os polos de um sistema) se encontrarão de acordo com a variação de um determinado parâmetro.

Considere o sistema em malha fechada:




A sua função de transferência é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)H(s)}$$

Com isso, os polos de malha fechada podem ser calculados resolvendo:

$$1 + K \cdot G(s) \cdot H(s) = 0$$

Deseja-se obter o lugar geométrico que descreve os polos desse sistema $\forall K \in \mathbb{R}^+$.

## Condição de ângulo e módulo

Seja $s_1 \in \mathbb{C}$ um ponto que pertence ao conjunto de polos do sistema em questão para um determinado valor de K. Então:

$$1 + K\,G(s_1)\,H(s_1) = 0$$

$$K\,G(s_1)\,H(s_1) = -1$$

Para que isso seja verdadeiro, duas condições devem ser satisfeitas:

1) $|K\,G(s_1)\,H(s_1)| = 1$ => Condição de módulo

2) $\angle K\,G(s_1)\,H(s_1) = \pm 180°(2K+1),\ K \in \mathbb{N}$. => Condição de ângulo

Então, se um ponto $s \in \mathbb{C}$ qualquer satisfazer (1) e (2), então ele pertence ao LGR. Adicionalmente, todo ponto do LGR satisfaz (1) e (2).

Dessa forma:

$s \in \mathbb{C}$ está no LGR $\Leftrightarrow$ $s$ satisfaz (1) e (2).

Genericamente, pode-se escrever:

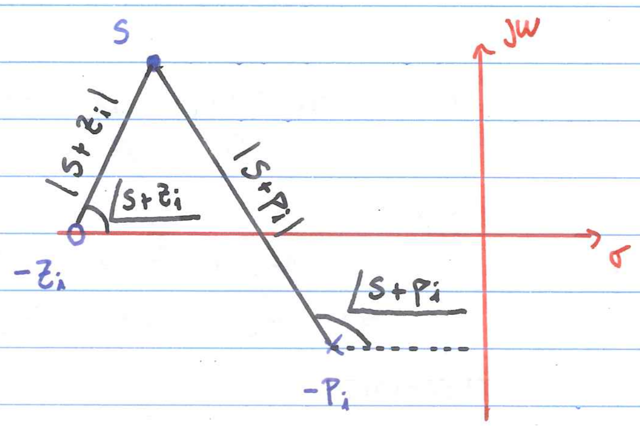
$$K\,G(s)\,H(s) = K.\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

onde $z_i$, $i \in [1,2,\dots,m]$, são os zeros de $G(s)H(s)$ e $p_i$, $i \in [1,2,\dots,n]$, são os polos de $G(s)H(s)$.

Com isso, as condições de ângulo e módulo podem ser escritas como:

1) $$|K\,G(s)\,H(s)| = K.\frac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{i=1}^{n}|s+p_i|}$$

2) $$\angle K\,G(s)\,H(s) = \left(\sum_{i=1}^{m}\angle s+z_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\angle s+p_i\right)$$




Nota: o LGR será traçado verificando a condição de ângulo, pois a condição de módulo depende ~~um~~ de um parametro $K \in \mathbb{R}^+$. Logo, podemos sempre selecionar $K$ para que (1) seja satisfeita.

Teorema: Se $s \in \mathbb{C}$ está no LGR, então $\bar{s} \in \mathbb{C}$ também estará no LGR.

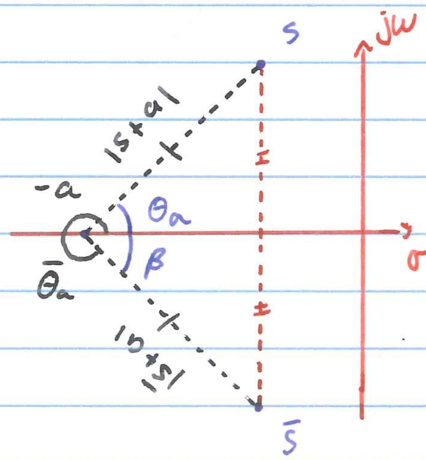
Se $s \in \mathbb{C}$ está no LGR, então as condições de ângulo e módulo são válidas, isto é:

$$|K\,G(s)\,H(s)| = K \frac{\prod_{i=1}^{m} |s+z_i|}{\prod_{i=1}^{n} |s+p_i|} = 1$$

$$\angle K\,G(s)\,H(s) = \left( \sum_{i=1}^{m} \angle s+z_i \right) - \left( \sum_{i=1}^{n} \angle s+p_i \right) = 180^\circ(2K+1)$$

para algum $K \in \mathbb{N}$.

Com isso, seja $-a$ um zero ou polo do sistema em questão. Se $a$ for real, então temos:




$$\theta_a = \angle s+a$$
$$\bar{\theta}_a = \angle \bar{s}+a$$

Por semelhança de triângulos,
$$\theta_a = \beta$$

logo:
$$\theta_a + \bar{\theta}_a = 360^\circ$$
$$\Rightarrow \bar{\theta}_a = 360^\circ - \theta_a = -\theta_a$$

Ademais:
$$|s+a| = |\bar{s}+a|$$

tilibra

Continuando, se $-a$ for complexo, então $-\bar{a}$ também será um polo ou zero do sistema. Portanto, note que:

$$
\begin{aligned}
s + a &= \overset{s}{\boxed{\sigma + j\omega}} + \overset{a}{\boxed{\sigma_a + j\omega_a}} = (\sigma + \sigma_a) + j(\omega + \omega_a) \\
s + \bar{a} &= \sigma + j\omega + \sigma_a - j\omega_a = (\sigma + \sigma_a) + j(\omega - \omega_a) \\
\bar{s} + a &= \sigma - j\omega + \sigma_a + j\omega_a = (\sigma + \sigma_a) + j(-\omega + \omega_a) \\
\bar{s} + \bar{a} &= \sigma - j\omega + \sigma_a - j\omega_a = (\sigma + \sigma_a) + j(-\omega - \omega_a)
\end{aligned}
$$

Então:

$$
\begin{aligned}
|s + a| &= \sqrt{(\sigma + \sigma_a)^2 + (\omega + \omega_a)^2} \\
|s + \bar{a}| &= \sqrt{(\sigma + \sigma_a)^2 + (\omega - \omega_a)^2} \\
|\bar{s} + a| &= \sqrt{(\sigma + \sigma_a)^2 + (-\omega + \omega_a)^2} = \sqrt{(\sigma + \sigma_a)^2 + (\omega - \omega_a)^2} \\
|\bar{s} + \bar{a}| &= \sqrt{(\sigma + \sigma_a)^2 + (-\omega - \omega_a)^2} = \sqrt{(\sigma + \sigma_a)^2 + (\omega + \omega_a)^2}
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
|s + a| &= |\bar{s} + \bar{a}| \\
|s + \bar{a}| &= |\bar{s} + a|
\end{aligned}
$$

Além disso:

$$
\angle s + a = \tan \frac{\omega + \omega_a}{\sigma + \sigma_a} \qquad \angle s + \bar{a} = \tan \frac{\omega - \omega_a}{\sigma + \sigma_a}
$$

$$
\angle \bar{s} + a = \tan \frac{-\omega + \omega_a}{\sigma + \sigma_a} = -\tan \frac{-\omega_a + \omega}{\sigma + \sigma_a} = -\angle s + \bar{a}
$$

$$
\angle \bar{s} + \bar{a} = \tan \frac{-\omega - \omega_a}{\sigma + \sigma_a} = -\tan \frac{\omega_a + \omega}{\sigma_a + \sigma} = -\angle s + a
$$

/ /

Portanto, temos as seguintes relações:

$$|s+a||s+\bar{a}| = |\bar{s}+a||\bar{s}+\bar{a}|$$
$$\angle s+a + \angle s+\bar{a} = -(\angle \bar{s}+a + \angle \bar{s}+\bar{a})$$

Finalmente:

$$|KG(\bar{s})H(\bar{s})| = K\frac{\prod_{i=1}^{m}|\bar{s}+z_i|}{\prod_{i=1}^{n}|\bar{s}+p_i|} = \underbrace{K\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{i=1}^{n}|s+p_i|}}_{|KG(s)H(s)|} = 1$$

$$\angle KG(\bar{s})H(\bar{s}) = \left(\sum_{i=1}^{m}\angle \bar{s}+z_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\angle \bar{s}+p_i\right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{m}-\angle s+z_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}-\angle s+p_i\right)$$
$$= -\underbrace{\left[\left(\sum_{i=1}^{m}+\angle s+z_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}+\angle s+p_i\right)\right]}_{\angle KG(s)H(s)}$$
$$= -\angle KG(s)H(s) = -180^\circ(2K+1)$$

Então: $$\angle KG(\bar{s})H(\bar{s}) = -180^\circ(2K+1) + 360(2K+1)$$
$$= +180^\circ(2K+1)$$

Logo, como as condições de ângulo e módulo são válidas para $\bar{s}\in\mathbb{C}$, então $\bar{s}$ pertence ao LGR. Isso significa que o LGR é espelhado no eixo real.

tilibra

## Técnica para construção do LGR

1) Localizar os polos e zeros de malha fechada

Note que:

$$1 + K.\frac{\prod_{i=1}^{m} s+z_i}{\prod_{i=1}^{n} s+p_i} = 0 \Rightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} s+p_i\right) + K\left(\prod_{i=1}^{m} s+z_i\right) = 0$$

- Se $K \to 0$, podemos aproximar essa equação por:

$$\prod_{i=1}^{n} s+p_i = 0$$

e, portanto, os pólos serão $-p_1, -p_2, -p_3, \ldots, -p_n$.

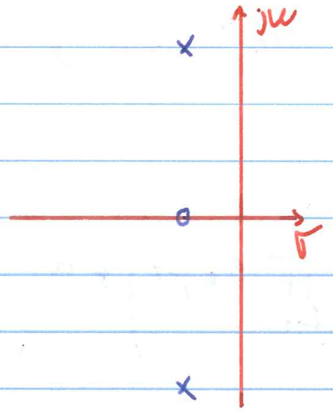
- Se $K \to \infty$, podemos aproximar essa equação por:

$$\prod_{i=1}^{m} s+z_i = 0$$

e, portanto, os pólos serão $-z_1, -z_2, -z_3, \ldots, -z_m$.

**Nota:** Se $m<n$, então o sistema também terá $-(m-n)$ polos no infinito para $K \to \infty$.

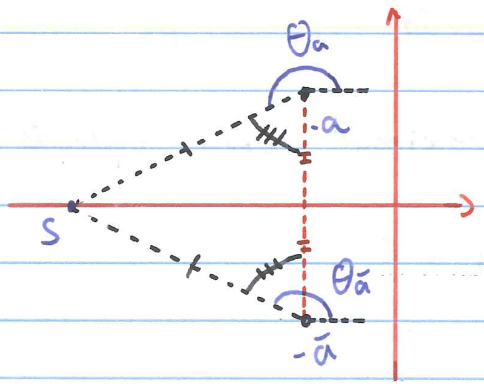
Exemplo: $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+10}$ => zeros: [-1]
polos: [-1+3j ; -1-3j]




Os ramos do LGR saem dos polos e terminam nos zeros (finitos e infinitos).

2) Determinar os trechos do LGR no eixo real

Seja $s \in \mathbb{R}$. Então, se $-a$ e $-\bar{a}$ forem um par de zeros ou pólos complexos conjugados, temos:




Por semelhança de triângulos,

$$\theta_a + \theta_{\bar{a}} = 360°$$

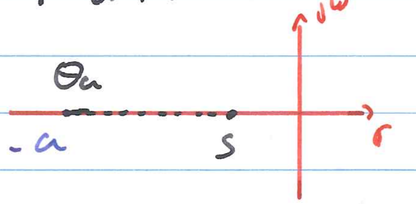
Com isso:

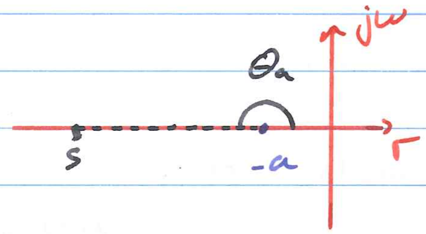
$$\angle s+a + \angle s+\bar{a} = 360°$$

Então polos e zeros complexos conjugados não contribuem para que a condição de ângulo seja satisfeita.

tilibra

Continuando, se $-a \in \mathbb{R}$ for um polo ou zero real, então:




$\angle s+a = 0°$ $\qquad\qquad$ $\angle s+a = 180°$

Logo, apenas polos ou zeros reais à direita do ponto s em questão contribuem para a condição de angulo.

Seja:

$m_z^d$: número de zeros à direita de s.

$n_p^d$: número de polos à direita de s.

$\begin{cases} 180°, & \text{se } z_i \in \mathbb{R} \text{ e está à direita de s.} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Então:

$\begin{cases} 180°, & \text{se } p_i \in \mathbb{R} \text{ e está à direita de s} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

$$\angle \cancel{K}G(s)H(s) = \left(\sum_{i=1}^{m} s + z_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} s + p_i\right)$$

$$= m_z^d \cdot 180 - n_p^d \cdot 180 + 360\, n_p^d$$

$$= m_z^d \cdot 180 + n_p^d \cdot 180$$

Portanto:

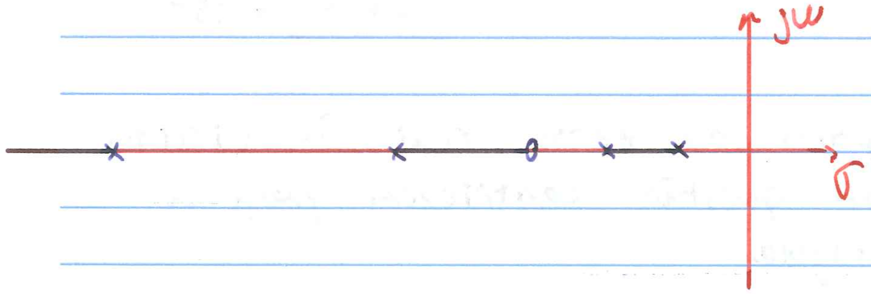
$$\angle KG(s)H(s) = \left(m_z^d + n_p^d\right) 180°$$

Se $m_z^d - n_p^d$ for par, $\angle KG(s)H(s) = 180° \cdot 2K = 0°$

Se $m_z^d - n_p^d$ for ímpar, $\angle KG(s)H(s) = 180° (2K+1)$, $K \in \mathbb{N}$

Logo, um trecho no eixo real pertence ao LGR se a soma de polos e zeros reais no eixo real à direita é ímpar.

**Exemplo:** $G(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+5)(s+10)}$



3) Determinar as assíntotas do lugar geométrico das raízes

Note que:

$$1 + K . \frac{\prod_{i=1}^{m} s + z_i}{\prod_{i=1}^{n} s + p_i} = 0$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} s + p_i + \left(K . \prod_{i=1}^{m} s + z_i\right)}{\prod_{i=1}^{n} s + p_i} = 0$$

Se $K \to \infty$, podemos aproximar

$$\frac{\prod_{i=1}^{m} s + z_i}{\prod_{i=1}^{n} s + p_i} = 0$$

Para $s \to \infty$, $s + z_i \approx s$ e $s + p_i \approx s$, então:

$$\frac{s^m}{s^n} = 0 \Rightarrow s^{m-n} = 0 \Rightarrow \frac{1}{s^{n-m}} = 0$$

Logo a equação possui $n-m$ zeros no infinito. Esses zeros são polos do sistema em malha fechada para $K \to \infty$. Então, o LGR terá $n-m$ assíntotas.

Vamos descobri o ângulo e ponto de partida delas.

Temos que:

$$K\,G(s)\,H(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} s+z_i}{\prod_{i=1}^{n} s+p_i} = K \frac{s^m + \left(\sum_{i=1}^{m} z_i\right) s^{m-1} + \dots}{s^n + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) s^{n-1} + \dots}$$

Para $s \to \infty$ e chamando

$$\Sigma z = \sum_{i=1}^{m} z_i \qquad \Sigma p = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Temos:

$$K\,G(s)\,H(s) \approx K \frac{s^m + \Sigma z \cdot s^{m-1}}{s^n + \Sigma p \cdot s^{n-1}} = K \cdot \frac{1}{\dfrac{s^n + \Sigma p \cdot s^{n-1}}{s^m + \Sigma z \cdot s^{m-1}}}$$

Note que:

$$\left[s^{n-m} + (\Sigma p - \Sigma z)\, s^{n-m-1}\right] \cdot \left[s^m + \Sigma z\, s^{m-1}\right] =$$

$$= s^n + \Sigma z\, s^{n-1} + (\Sigma p - \Sigma z)\, s^{n-m-1+m} + (\Sigma p - \Sigma z)\Sigma z \cdot s^{n-2}$$

$$= s^n + \Sigma z\, s^{n-1} + (\Sigma p - \Sigma z)\, s^{n-1} + \underbrace{(\Sigma p - \Sigma z)\Sigma z \cdot s^{n-2}}_{\text{desprezando para } s \to \infty}$$

$$\approx s^n + \Sigma p\, s^{n-1}$$

Então:

$$K.G(s)H(s) \approx K \frac{1}{s^{n-m} + (\Sigma p - \Sigma z)s^{n-m-1}}$$

Além disso, lembre-se que:

$$(s+a)^{n-m} = s^{n-m} + (n-m)a\,s^{n-m-1} + \boxed{\dots}$$

Termos de ordem inferior que serão desprezados quando $s \to \infty$

Se $s \to \infty$, então:

$$(s+a)^{n-m} \approx s^{n-m} + (n-m)a\,s^{n-m-1}$$

Analogamente:

$$\left(s + \frac{a}{n-m}\right)^{n-m} \approx s^{n-m} + a\,s^{n-m-1}$$

Com isso, pode-se escrever:

$$s^{n-m} + (\Sigma p - \Sigma z)s^{n-m-1} = \left(s + \frac{\Sigma p - \Sigma z}{n-m}\right)^{n-m}$$

Logo, para $s \to \infty$

$$K.G(s)H(s) \approx K \frac{1}{\left(s + \underbrace{\boxed{\frac{\Sigma p - \Sigma z}{n-m}}}_{b}\right)^{n-m}}$$

A condição de ângulo então fornece:

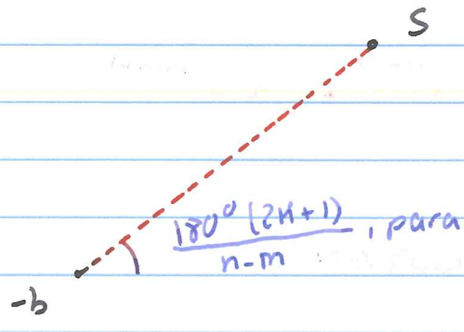
$$\angle K G(s) H(s) \approx \angle K \cdot \frac{1}{(s+b)^{n-m}} = 180^\circ (2K+1)$$

$$\Rightarrow -(n-m) \cdot \angle s+b = 180^\circ (2K+1)$$

$$\angle s+b = -\frac{180^\circ(2K+1)}{n-m} = \frac{180^\circ(2K+1)}{n-m}, \ K \in \mathbb{N}$$

Então, se $s \to \infty$ pertence ao LGR, o angulo medido a partir do ponto $-b$ deve ser $\frac{180^\circ(2K+1)}{n-m}$, $K \in \mathbb{N}$

Existem apenas $n-m$ valores diferentes




$\frac{180^\circ(2K+1)}{n-m}$, para algum $K \in \mathbb{N}$

Finalmente:

- Número de assíntotas: $n-m$
- Ângulo das assíntotas: $\frac{180^\circ(2K+1)}{n-m}$, $K \in \mathbb{N}$
- Cruzamento no eixo real das assíntotas: $\dfrac{\sum_{i=1}^{m} z_i - \sum_{i=1}^{n} p_i}{n-m}$

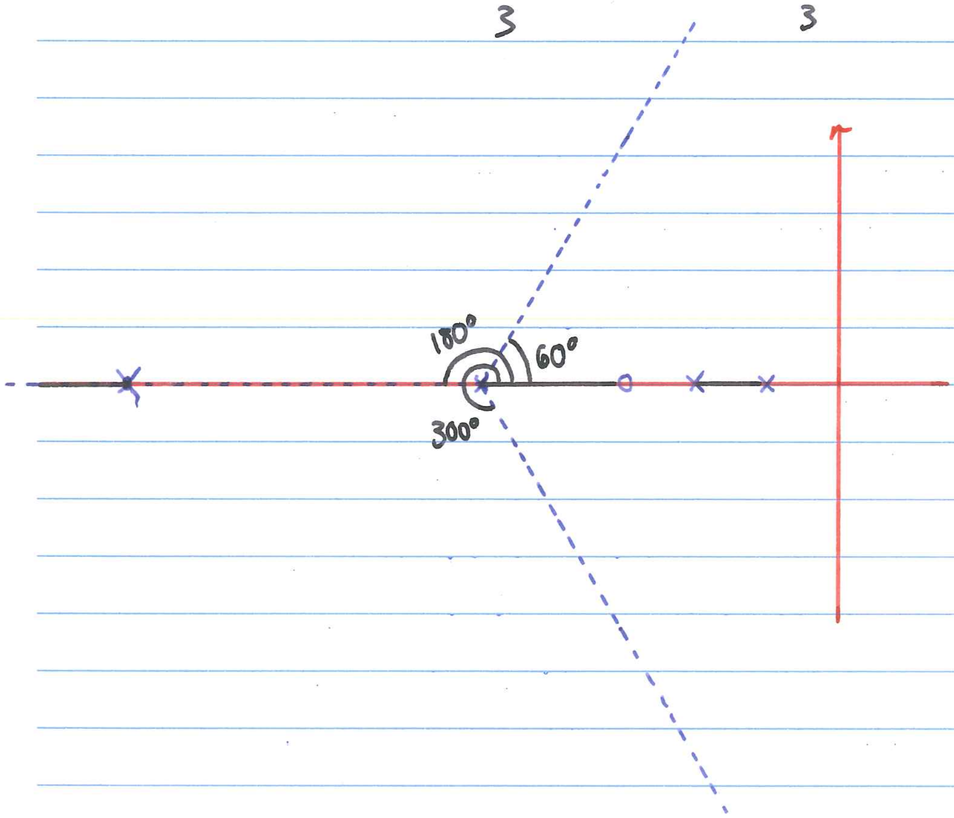
Exemplo: $G(s) = \dfrac{(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+5)(s+10)}$

Temos: $m = 1$, $n = 4$, $n - m = 3$

$z_1 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 10$

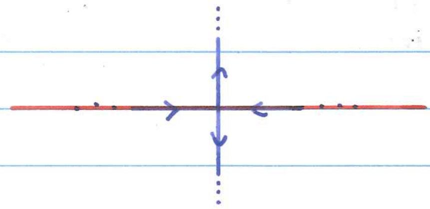
Logo: $\theta_a = \dfrac{+180°(2k+1)}{3} = 60°(2k+1) = [60°, 180°, 300°]$

$\sigma_a = \dfrac{3 - (1+2+5+10)}{3} = -\dfrac{15}{3} = -5$



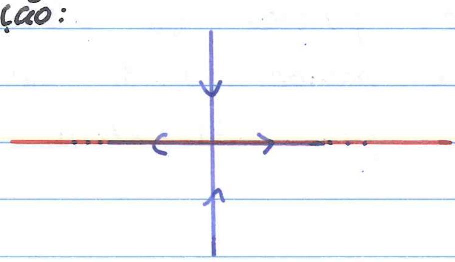
4) Determinar os pontos de partida ou chegada no eixo real.

Se o LGR sair do eixo real, temos a seguinte configuração:



Nota: o LGR apenas cruza trechos do eixo real que efetivamente pertencem ao LGR. Isto é, nunca se cruzará o eixo real em apenas 1 ponto.

Se o LGR chegar ao eixo real, temos a seguinte configuração:



Em ambos os casos, note que no ponto de cruzamento entre LGR e eixo real teremos uma condição em que existirão dois polos de malha fechada reais e iguais. Então temos que encontrar os pontos em que o polinômio característico do sistema apresenta raízes múltiplas e reais.

Se para um determinado K, existir um polo de malha fechada em $-s_p$ com multiplicidade $P$, então o polinômio característico pode ser escrito como:

$$f(s) = (s+s_p)^p \cdot \prod_{i=1}^{n-p} s+p_i$$

Com isso:

$$\frac{df(s)}{ds} = p\,(s+s_p)^{p-1} \cdot \prod_{i=1}^{n-p} s+p_i + (s+s_p)^p \cdot \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^{n-p} s+p_i$$

Logo:

$$\left.\frac{d}{ds} f(s)\right|_{s=s_p} = 0$$

Então, para encontrar os pontos do LGR que possuem polos com multiplicidade maior que 1, basta calcular o conjunto de pontos que satisfazem a equação anterior $\forall K \in \mathbb{R}^+$.

A equação característica do sistema é:

$$f(s) = \underbrace{\boxed{\prod_{i=1}^{n} s+p_i}}_{B(s)} + \underbrace{\boxed{K \cdot \prod_{i=1}^{m} s+z_i}}_{K.A(s)} = 0$$

$$f(s) = B(s) + K.A(s) = 0 \qquad (*)$$

Para um determinado K fixo, os pontos de raízes múltiplas são obtidos por:

$$\frac{d}{ds} f(s) = \underbrace{B'(s)}_{\frac{dB(s)}{ds}} + K \underbrace{A'(s)}_{\frac{dA(s)}{ds}} = 0$$

tilibra

Logo,

$$K = -\frac{B'(s)}{A'(s)}$$

Substituindo em (*), temos:

$$B(s) - \frac{B'(s)}{A'(s)} \cdot A(s) = 0$$

$$B(s) \cdot A'(s) - B'(s) A(s) = 0$$

Resolvendo essa equação, obtem-se os pontos do LGR ~~que~~ onde ocorrem raízes multiplas. Entretanto, para facilitar a construção, note que:

$$B(s) + K A(s) = 0 \Rightarrow K = -\frac{B(s)}{A(s)}$$

Logo:

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)} = \frac{B(s)A'(s) - B'(s)A(s)}{A^2(s)}$$

Claramente, se, para um $s_p \in \mathbb{C}$,

$$B(s_p) A'(s_p) - B'(s_p) A(s_p) = 0$$

Então:

$$\left.\frac{dK}{ds}\right|_{s=s_p} = 0$$

Logo, os pontos candidatos a pontos de partida ou chegada no eixo real são determinados encontrando as raízes da equação:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

NOTA: Nem toda solução é um ponto de partida ou chegada! Para isso, a solução deve ser real e o valor de K correspondente deve ser maior que zero.

**Exemplo:** $G(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+5)(s+10)}$

$$G(s) = \frac{s+3}{s^4 + 18s^3 + 97s^2 + 180s + 100}$$

$$1 + K\,G(s) = 0 \iff K = -\frac{1}{G(s)} = -\frac{s^4 + 18s^3 + 97s^2 + 180s + 100}{s+3}$$

Portanto:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow -\frac{(4s^3 + 54s^2 + 194s + 180)(s+3) - (s^4 + 18s^3 + 97s^2 + 180s + 100)}{(s+3)^2} = 0$$

Então:

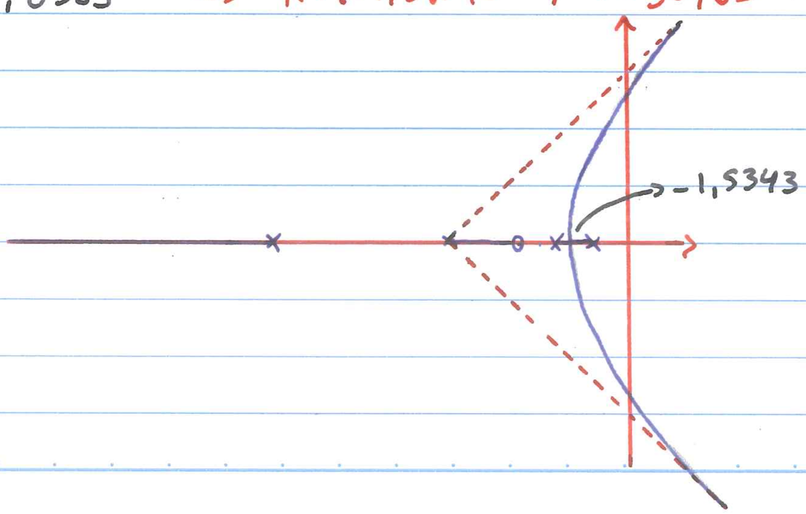
$$3s^4 + 48s^3 + 259s + 582s + 440 = 0$$

$s_1 = -3,3129 + j\,1,1035$

$s_2 = -3,3129 - j\,1,1035$

$s_3 = -1,5343 \Rightarrow K = (+0,2)^{-1} = 4,98$

$s_4 = -7,8399 \Rightarrow K = (-1,98 \cdot 10^{-2})^{-1} = -50,63$



5) Determinar o ângulo de partida/chegada de/a um polo/zero complexo

Seja $-a$ um polo ou zero do sistema em malha aberta. Considere um ponto $s \in \mathbb{C}$ muito próximo de $-a$ que pertence ao LGR. Podemos dizer que $s \approx a$. Então:

$$\angle KG(s)H(s) = \left(\sum_{i=1}^{m} \angle s+z_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \angle s+p_i\right)$$

+: a é zero
−: a é polo

Assumindo s.p.g. que $a = z_m$ ou $a = p_m$

$$\approx \left(\sum_{i=1}^{m-v} \angle a+z_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-w} \angle a+p_i\right) \pm \angle s+a$$

$v = \begin{cases} 1, & a \text{ é zero} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$ $\quad w = \begin{cases} 1, & a \text{ é polo} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

Se $s$ está no LGR:

$$\angle KG(s)H(s) = 180°(2K+1), \quad K \in \mathbb{N}$$

Logo:

$$\left(\sum_{i=1}^{m-v} \angle a+z_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-w} \angle a+p_i\right) \pm \angle s+a = 180°(2K+1)$$

$$\pm \angle s+a = \underbrace{180°(2K+1)}_{\downarrow} - \left(\sum_{i=1}^{m-v} \angle a+z_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-w} \angle a+p_i\right)$$

K é qualquer número natural. Então, $K=0$ para zeros e polos.

Portanto, temos:

- Se a for um zero, o ângulo de ~~partida~~ chegada do LGR é:

$$\angle s+a = 180^\circ - \left(\sum_{i=1}^{m-1} \angle a+z_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \angle a+p_i\right)$$

- Se a for um polo, o ângulo de partida do LGR é:

$$\angle s+a = -180^\circ + \left(\sum_{i=1}^{m} \angle a+z_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \angle a+p_i\right) + 360^\circ$$

$$\angle s+a = \frac{360^\circ}{2} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \angle a+p_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} \angle a+z_i\right)$$

$$\angle s+a = 180^\circ - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \angle a+p_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} \angle a+z_i\right)$$

Exemplo: $G(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+2} = \dfrac{1}{(s+\underbrace{1-j}_{p_1})(s+\underbrace{1+j}_{p_2})}$

Pólos: $s^2+2s+2=0$

$\Delta = 4-8 = -4$

$s = \dfrac{-2 \pm j2}{2} = -1 \pm j$

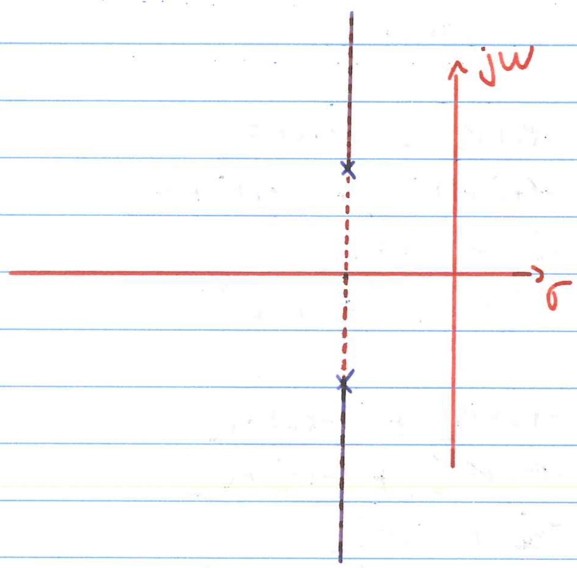
Assíntotas: $n-m = 2$, $\dfrac{180^\circ(2k+1)}{2} = [90^\circ, 270^\circ]$

$\sigma_a = -\dfrac{(+1 \cancel{+j} + 1 \cancel{-j})}{2} = -1$

## Ângulo de partida dos pólos:

$$p_1 : \angle s+p_1 = 180^\circ - \angle -p_1+p_2 = 180^\circ - \angle \cancel{-1}+j\cancel{+1}+j$$
$$= 180^\circ - \angle 2j = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$p_2 : \angle s+p_2 = 180^\circ - \angle -p_2+p_1 = 180^\circ - \angle \cancel{-1}-j\cancel{+1}-j$$
$$= 180^\circ - \angle -2j = 180^\circ - (-90^\circ) = 270^\circ$$




**Exemplo:** $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2+2s+2} = \dfrac{s+\overbrace{2}^{z_1}}{(\underbrace{s+1-j}_{p_1})(\underbrace{s+1+j}_{p_2})}$

Assíntotas: $n-m=1$, $180^\circ$

Cruzamento no eixo real:

$$1+KG(s)=0 \Rightarrow K = -\frac{1}{G(s)} = -\frac{s^2+2s+2}{s+2}$$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s+2)(s+2)-(s^2+2s+2)}{s+2}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow (2s+2)(s+2) - (s^2 + 2s + 2) = 0$$

$$2s^2 + \cancel{2s} + 4s + 4 - s^2 - \cancel{2s} - 2 = 0$$

$$s^2 + 4s + 2 = 0$$

$$\Delta = 16 - 8 = 8$$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} -0{,}5858 \Rightarrow K<0 \\ -3{,}4142 \Rightarrow K>0 \end{cases}$$

Angulo de partida dos polos:

$$p_1: \angle s+p_1 = 180° - \angle -p_1+p_2 + \angle -p_1+z_1$$

$$= 180° - \angle \cancel{-1}+j\ \cancel{+1}+j + \angle -1+j+2$$

$$= 180° - \angle 2j + \angle 1+j$$

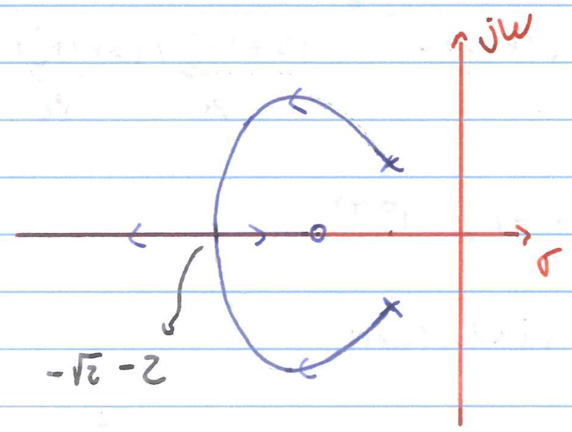
$$= 180° - 90° + 45° = 135°$$

$$p_2: \angle s+p_2 = 180° - \angle -p_2+p_1 + \angle -p_2+z_1$$

$$= 180° - \angle \cancel{-1}-j\ \cancel{+1}-j + \angle -1-j+2$$

$$= 180° - \angle -2j + \angle 1-j$$

$$= 180° - (-90°) + 315° = 585° = 225°$$



6) Determinar os pontos que o LGR cruza o eixo imaginário

Esses pontos podem ser determinados utilizando o critério de Routh ou utilizando o seguinte resultado:

Se $s \in \mathbb{C}$ está no eixo imaginário, então $s = j\omega$. Se $s$ está no LGR, então:

$$1 + K\,G(s)\,H(s) = 0$$

$$1 + K\,G(j\omega)\,H(j\omega) = 0$$

Resolvendo para $\omega$ e $K$, pode-se se obter os locais de cruzamento em que $K > 0$.

Exemplo: $G(s) = \dfrac{s+3}{s^4 + 18s^3 + 97s^2 + 180s + 100}$

$$1 + G(j\omega)\cdot K = 0 \Rightarrow (j\omega)^4 + 18(j\omega)^3 + 97(j\omega)^2 + 180j\omega + 100 + Ks + 3K = 0$$

$$\omega^4 - j18\omega^3 - 97\omega^2 + j180\omega + 100 + jK\omega + 3K = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^4 - 97\omega^2 + 3K + 100 = 0 \\ -18\omega^3 + 180\omega + K\omega = 0 \end{cases}$$

Então: $\omega\left(-18\omega^2 + 180 + K\right) = 0$

$$\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \omega = \pm\sqrt{\frac{180 + K}{18}}$$

Se $w = 0 \Rightarrow K = -\frac{100}{3}$, logo $w=0$ não é um ponto de cruzamento do eixo imaginário. Então:

$$\frac{(180+K)^2}{18^2} - 97\frac{(180+K)}{18} + 3K + 100 = 0 \quad \times(18^2)$$

$$32400 + 360K + K^2 - 97.18.(180+K) + (3K+100).18^2 = 0$$

$$32400 + 360K + K^2 - 314280 - 1746K + 972K + 32400 = 0$$

$$K^2 - 414K - 249480 = 0$$

$$K = \begin{cases} -333,67 \\ +747,67 \rightarrow \text{ganho crítico} \end{cases}$$

Finalmente:

$$w = \pm\sqrt{\frac{180+K}{18}} = \pm 7,18$$