Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica e Computação, Área de Sistemas e Controle.

Ronan Arraes Jardim Chagas

ESTIMAÇÃO DISTRIBUÍDA DE ERROS EM SISTEMAS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL AUXILIADA

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:

Prof. Dr. Jacques Waldmann
Orientador

Prof. Dr. Celso Massaki Hirata
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão de Informação e Documentação

Chagas, Ronan Arraes Jardim
Estimação distribuída de erros em sistemas de navegação inercial auxiliada / Ronan Arraes Jardim Chagas.
São José dos Campos, 2012.
193f.

Tese de Doutorado – Curso de Engenharia Eletrônica e Computação. Área de Sistemas e Controle – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2012. Orientador: Prof. Dr. Jacques Waldmann.

1. Estimação distribuída. 2. Filtragem de Kalman. 3. Sistemas de navegação. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CHAGAS, Ronan Arraes Jardim. **Estimação distribuída de erros em sistemas de navegação inercial auxiliada**. 2012. 193f. Tese de Doutorado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

Ronan Arraes Jardim Chagas
Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Divisão de Engenharia Eletrônica – Sala 224
Pça. Mal-do-Ar Eduardo Gomes, 50 – Vl. Acácias
12.228-900 – São José dos Campos – SP

ESTIMAÇÃO DISTRIBUÍDA DE ERROS EM SISTEMAS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL AUXILIADA

Ronan Arraes Jardim Chagas

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Marcelo Gomes da Silva Bruno	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Jacques Waldmann	Orientador	-	ITA
Prof. Dr.	Vítor Heloiz Nascimento	Membro Externo	-	EPUSP
Prof. Dr.	Hélio Koiti Kuga	Membro Externo	-	INPE
Prof. Dr.	Elder Moreira Hemerly	Membro	-	ITA

ITA

A Deus por ter me dado vida e à minha mãe que me apoiou e me guiou em todos os momentos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu vida, saúde e inteligência para chegar até aqui.

Agradeço à minha mãe, Elisabeth Arraes Jardim Chagas. Não teria conseguido ser nem a metade do que sou se não fosse pelos seus conselhos, seus carinhos, sua torcida e sua fé. Não possuo palavras para expressar o quão grato sou por ser seu filho e como minha vida é mais fácil por ter você ao meu lado. Ter sucesso para mim é, simplesmente, ser como a senhora é. Obrigado por tudo.

Agradeço ao meu pai, Ricardo Ferreira Chagas, e à minha irmã, Rayane Arraes Jardim Chagas, que sempre me apoiaram e estiveram comigo.

Agradeço aos meus avós, Virgolino Miguel Jardim e Ilda Arraes Jardim, por todo o carinho e apoio que me deram durante esses quase 4 anos em que estive fora de Brasília.

Agradeço à minha noiva, Laysa Cristina Araújo Resende, pelos conselhos, suporte e preocupação. Você fez a caminhada ser bem mais fácil, é uma luz que Deus colocou no meu caminho para cuidar de mim.

Agradeço à Flávia Camargo, a minha mãe 2, que fez com que a minha mudança de Brasília para São José dos Campos fosse muito tranquila, sempre me apoiando, me ajudando e me aconselhando quando precisava.

Agradeço a todos os meus amigos que deixei em Brasília, amigos verdadeiros que sempre torceram por mim.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Jacques Waldmann, por toda a sua disponibilidade e ajuda durante a minha vida acadêmica no ITA.

Agradeço ao projeto SIA, por todo o apoio financeiro prestado.

“Só quem se arrisca a ir longe demais,
descobre o quão longe se pode ir.”
— T. S. ELLIOT

Resumo

Uma rede de sensores distribuídos estimando processos dinâmicos pode atingir um nível de robustez maior na operação. Nesse cenário, se um determinado nó apresentar falhas, as informações oriundas da rede poderão impedir a degradação significativa ou a interrupção do processo de estimação. A literatura científica possui um desenvolvimento vasto em algoritmos para fundir informações em uma rede de sensores na qual cada nó está observando o mesmo processo dinâmico. Também existem alguns desenvolvimentos para fundir essas informações quando a comunicação ocorre com atrasos. Entretanto, no melhor conhecimento do autor, ainda não foram desenvolvidos algoritmos para realizar estimação distribuída quando os nós observam processos diferentes, mas relacionados entre si, em redes cuja comunicação envolve atrasos. Aplicações interessantes fazem parte desse tipo de cenário, como, por exemplo, a estimação dos respectivos erros de navegação e dos sensores em cada um dos sistemas de navegação embarcados em veículos aéreos não-tripulados (VANTs) voando em formação e munidos de algum dispositivo de comunicação. Dessa forma, esse trabalho buscou desenvolver técnicas para fundir medidas atrasadas em redes de sensores nas quais os nós não compartilham o mesmo modelo dinâmico. Dois novos algoritmos sub-ótimos foram propostos: a extrapolação de medidas e o transporte de medidas. Estes foram comparados com uma abordagem clássica de fusão de medidas atrasadas em um filtro de Kalman, que é ótima por construção, e que foi adaptada para o problema distribuído em questão. Num primeiro momento, os algoritmos foram ana-

lisados de maneira teórica, calculando-se a performance esperada, a necessidade de memória e a carga computacional baseada no número de operações de ponto flutuante. Logo após, os algoritmos foram testados em um exemplo numérico simplificado para uma primeira validação. Então, uma rede de VANTs simulados foi construída e foi considerado que os veículos trocam, com atraso, as medidas dos sensores GNSS aliadas com uma informação da posição relativa entre as aeronaves. Os dois algoritmos desenvolvidos foram comparados com a abordagem ótima e seus respectivos desempenhos e cargas computacionais foram numericamente aferidos. Concluiu-se que, para fins práticos, os métodos sub-ótimos fundem apropriadamente as medidas atrasadas, limitando os erros de navegação, e apresentam carga computacional significativamente menor do que o método ótimo. A performance da extrapolação de medidas se mostrou bastante degradada quando o atraso na troca de informações é alto. Já o transporte de medidas obteve performance muito similar à abordagem clássica em todos os cenários simulados. Dessa forma, a investigação indica que os métodos desenvolvidos apresentam uma melhor razão custo/benefício com respeito à abordagem ótima para a aplicação mencionada, tanto em cenários com atrasos pequenos como em situações com atrasos grandes.

Abstract

A distributed sensors network estimating dynamic processes achieves a higher level of robustness. In this scenario, if a particular node fails, the information from the network can prevent significant degradation or interruption of the estimation process. The literature has a myriad of algorithms to fuse information in a distributed sensors network in which each node is measuring the same dynamic process. There are also proposed methods to fuse such information when it is shared, with delays, among the nodes. However, to the best knowledge of the author, algorithms have not yet been developed to perform distributed estimation in a sensor network with communication delays in which each node measures a different yet related dynamic process. Many interesting applications fit this scenario, for example, a swarm of unmanned aerial vehicles (UAVs) flying in formation and outfitted with communication devices. Therefore, this investigation aimed at developing techniques to fuse delayed measurements in sensor networks in which the nodes do not share the same dynamics model. Two novel algorithms have been proposed: measurement extrapolation and measurement transportation. These techniques have been compared to a classical approach to fuse delayed measurements in a Kalman filter, which is optimal by construction, and has been adapted to the aforementioned distributed scenario. First, the algorithms have been analyzed theoretically by deriving their expected performance, memory requirements, and computational workload based on floating point operations. Afterwards, the algorithms have been tested using a simplified numerical

example for initial validation. Then, a UAV formation has been simulated to perform the role of a sensor network with aircraft exchanging delayed GNSS sensor measurements and relative positions. The two novel, sub-optimal algorithms have been numerically compared with the optimal approach in terms of accuracy and computational workload. The sub-optimal algorithms have fused properly the delayed measurements and limited the navigation errors, whereas the computational load has been significantly lower than that of the classical, optimal approach. Measurement extrapolation performance has been severely degraded when subjected to a significant communication delay. On the other hand, measurement transportation performance has been very similar to that of the classical approach in all simulated scenarios. Thus, this investigation indicates that the developed techniques improve the cost/benefit relative to the optimal algorithm for the aforementioned scenarios with both small and large delays.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

AC	Abordagem Clássica
DCM	*Direction Cosine Matrix* (Matriz de cossenos diretores)
EM	Extrapolação de Medidas
f.d.p.	Função densidade de probabilidade
FKD	Filtro de Kalman Distribuído
FKG	Filtro de Kalman Global
FKL	Filtro de Kalman Local
FLOPs	*Floating-point operations*
GNSS	*Global Navigation Satellite System*
GPS	*Global Positioning System*
IMU	*Inertial Measurement Unit*
INS	*Inertial Navigation System*
LMMSE	*Linear Minimum Mean Square Error*
MSE	*Mean Square Error*
SIA	Sistemas inerciais para aplicação aeroespacial
TM	Transporte de Medidas
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado

Lista de Símbolos

a	Escalar.
$\mathbf{a}$	Vetor.
$\mathbf{A}$	Matriz.
$\mathbf{A}^T$	Matriz $\mathbf{A}$ transposta.
$\mathbf{I}_{M\times M}$	Matriz identidade de dimensão $M \times M$.
$\mathbf{a} \propto \mathbf{b}$	$\mathbf{a}$ é proporcional a $\mathbf{b}$.
$\mathbf{z} = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$	Produto linha-a-linha entre os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, ou seja, $\mathbf{z}(i) = \mathbf{x}(i) \cdot \mathbf{y}(i)$.
$[\mathbf{x}]_\times \mathbf{y}$	$[\mathbf{x}]_\times$ é uma matriz anti-simétrica que representa o produto vetorial $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.
$diag(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C})$	Indica uma matriz bloco diagonal formada pelas matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.
$p(\mathbf{x})$	Função densidade de probabilidade do vetor aleatório $\mathbf{x}$.
$\hat{\mathbf{x}}_{k\|j}$	Estimativa do vetor aleatório $\mathbf{x}_k$ utilizando todas as medidas disponíveis até o instante j.
$\tilde{\mathbf{x}}_{k\|j}$	Erro de estimação do vetor aleatório $\mathbf{x}_k$ utilizando todas as medidas disponíveis até o instante j, ou seja, $\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k\|j}$.
$\mathbf{P}_{k\|j}$	Matriz de covariância do erro de estimação do vetor aleatório $\mathbf{x}_k$ utilizando todas as medidas disponíveis até o instante j.
$cov\{\mathbf{x},\mathbf{y}\|\mathbf{z}\}$	Matriz de covariância cruzada entre os vetores aleatórios $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dado $\mathbf{z}$, ou $E\{(\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\|\mathbf{z}\})(\mathbf{y}-E\{\mathbf{y}\|\mathbf{z}\})^T\|\mathbf{z}\}$.
$\mathbf{y}_{0:k}$	Vetor formado pela concatenação dos vetores $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$.

$\mathbf{C}_{k,i}^{xy}$ Covariância cruzada entre o estado e o vetor de medida na atualização do filtro de Kalman do i-ésimo nó no instante k.

$\mathbf{C}_{k,i}^{yy}$ Autocovariância do vetor de medida na atualização do filtro de Kalman do i-ésimo nó no instante k.

$\mathcal{N}(\mathbf{x};\mathbf{m},\mathbf{R})$ Função densidade de probabilidade da variável aleatória Gaussiana $\mathbf{x}$ com média $\mathbf{m}$ e covariância $\mathbf{R}$.

Asp Força específica.

e Achatamento do elipsoide de interpolação.

WGS84: $e = \frac{1}{298,25}$

g_0 Gravidade sobre a superfície, ao longo da linha do equador.

$(g_0 = 9,780327 m/s^2)$

g_e Gravidade na latitude do veículo.

($g_e \approx g_0(1+0.053\sin^2(\lambda)+6\cdot 10^{-6}\sin^2(2\lambda))$, em que λ é a latitude do veículo)

R_0 Raio equatorial.

$(6,378138 \cdot 10^6 m)$

R_e Raio da Terra na latitude do veículo.

$(R_e \approx R_0(1-e\cdot\sin^2(\lambda)))$

R_N Raio de curvatura na direção norte na latitude do veículo.

$(R_N \approx R_0(1-e\cdot(2-3sin^2(\lambda)))$

R_E Raio de curvatura na direção leste na latitude do veículo.

$(R_E \approx R_0(1+e\cdot\sin^2(\lambda)))$

Ω_e Velocidade angular da Terra.

$\Delta\mathbf{R}_l$ Erro de posição representado no sistema local.

$\Delta\mathbf{V}_l$	Erro de velocidade representado no sistema local.
ψ	Desalinhamento entre o sistema computado e o sistema da plataforma.
$\boldsymbol{\nabla}_b$	*Bias* da tríade de acelerômetros representado no sistema do corpo.
$\boldsymbol{\epsilon}_b$	Deriva das tríade de girômetros representada no sistema do corpo.
$\boldsymbol{\delta}_b$	*Bias* do magnetômetro representado no sistema do corpo.
$\boldsymbol{\Omega}_{k,i}$	Conjunto de todos os vetores de medidas fundidos pelo i-ésimo nó até o instante k.
$\boldsymbol{\nu}^i_{k,\Delta_n}$	Conjunto formado pelos vetores de medidas atrasadas por Δ_n instantes de amostragem recebidos pelo i-ésimo nó no instante k.
$\mathbf{y}^s_{k,i}$	Vetor de medida do i-ésimo nó no instante k projetado para o espaço de estados.
$\mathbf{R}^s_{k,i}$	Covariância do ruído de medição do vetor de medida $\mathbf{y}^s_{k,i}$.
$\mathbf{y}^f_{k,\Delta_n,i}$	Vetor formado pela fusão dos vetores recebidos pelo i-ésimo nó no instante k atrasados por Δ_n períodos de amostragem.
$\mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}$	Matriz de medição relacionada ao vetor $\mathbf{y}^f_{k,\Delta_n,i}$.
$\mathbf{v}^f_{k,\Delta_n,i}$	Ruído de medição associado ao vetor $\mathbf{y}^f_{k,\Delta_n,i}$.
$\mathbf{R}^f_{k,\Delta_n,i}$	Matriz de covariância do ruído medição $\mathbf{v}^f_{k,\Delta_n,i}$.
$\mathbf{y}^{ac}_{k-\Delta_n,i}$	Vetor de medidas utilizado na fusão no instante $k-\Delta_n$ pelo i-ésimo nó no algoritmo reiteração do filtro de Kalman (abordagem clássica).
$\mathbf{R}^{ac}_{k-\Delta_n,i}$	Matriz de covariância utilizada na fusão no instante $k-\Delta_n$ pelo i-ésimo nó no algoritmo reiteração do filtro de Kalman (abordagem clássica).
$\mathbf{y}^{u,em}_{k,i}$	Vetor formado pelo empilhamento dos vetores de medidas atrasadas extrapolados pelo i-ésimo nó no instante k.

$\mathbf{y}_{k,i}^{em}$	Vetor para utilização do método extrapolação de medidas com viés removido pelo i-ésimo nó no instante k.
$\mathbf{y}_{k,\Delta_n,i}^{p}$	Vetor de medida atrasada por Δ_n instantes de amostragem que foi recebido pelo i-ésimo nó no instante k e foi transportado para o instante atual conforme o método transporte de medidas.
$\mathbf{y}_{k,i}^{tm}$	Vetor utilizado na atualização do método transporte de medidas pelo i-ésimo nó no instante k.
I_{AC}	Quantidade de informação que deve ser armazenada pelo algoritmo da reiteração do filtro de Kalman.
I_{EM}	Quantidade de informação que deve ser armazenada pelo algoritmo extrapolação de medidas.
I_{TM}	Quantidade de informação que deve ser armazenada pelo algoritmo transporte de medidas.

1 Introdução

Nos últimos anos vários trabalhos surgiram abordando o problema de estimação distribuída através de uma rede de sensores. Esses trabalhos analisam uma rede de nós interligados que se comunicam e trocam informações a respeito de um processo sendo medido, conforme mostrado na figura 1.1.

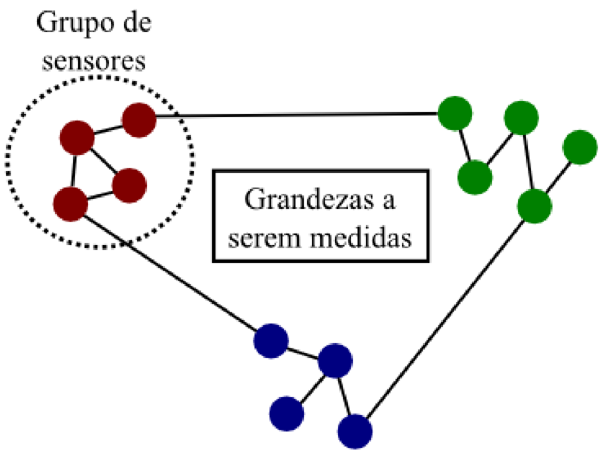

FIGURA 1.1 – Rede de sensores distribuídos.

Cada nó possui um conjunto de sensores e uma unidade de processamento que itera algum algoritmo recursivo para estimação dos estados do sistema. Diferentemente da arquitetura centralizada, onde um único nó de processamento central tem acesso a todos os sensores e executa a estimação, esta topologia não está sujeita a um único ponto de falha. Assim, o sistema é robusto no sentido que alguns nós podem parar de funcionar sem comprometer o processo de estimação. Além disso, a presença de um número maior de sensores aumenta a qualidade da estimação, desde que não estejam em falha e as características estocásticas do ruído sejam perfeitamente conhecidas (MAYBECK, 1979). Como um exemplo de aplicação direta, pode-se citar uma rede de radares rastreando um mesmo alvo (RISTIC; ARULAMPALAM; GORDON, 2004).

Atualmente, a literatura, principalmente em Português, não possui uma padronização clara para a nomenclatura em estimação distribuída. Dessa forma, convém primeiramente reproduzir algumas definições baseadas nos trabalhos de Olfati-Saber (2007), Cattivelli, Lopes e Sayed (2008), Lopes e Waldmann (2008) e Chagas e Waldmann (2009):

- **Estimativa Local:** é a estimativa fornecida pelos filtros locais quando não existe nenhuma comunicação na rede. Neste texto, um filtro que gere esta estimativa será chamado de Filtro de Kalman Local (FKL);

- **Estimativa Distribuída:** é a estimativa fornecida por filtros locais quando existe alguma troca de informação entre os nós da rede. Neste texto, o processo de filtragem que gera esta estimativa será chamado de Filtragem de Kalman Distribuída (FKD);

- **Estimativa Global:** é a estimativa que seria fornecida caso um filtro possuísse acesso simultaneamente a todos os sensores, sendo assim o limitante superior na qualidade da estimativa provida pela rede. Neste texto, o filtro que gera esta estimativa será chamado de Filtro de Kalman Global (FKG).

Notadamente, a grande maioria das referências a seguir analisa formas de realizar a fusão de dados de uma rede em que os nós iteram filtros de Kalman. A primeira tentativa de se distribuir a estimação em um problema de engenharia inercial foi o filtro de Kalman federado, que pode ser creditado a Carlson (1988). Este autor propõe um conjunto de filtros de Kalman locais recebendo dados dos sensores e enviando suas estimativas junto com a covariância do erro de estimação a um filtro central, mestre (*master*), responsável por fundir estimativas e covariâncias locais para gerar a estimativa global. Adicionalmente, o filtro central necessita realimentar informação de volta para os filtros locais para que a otimalidade seja assegurada (CARLSON, 1988). Mais tarde, Felter (1990) também indica o filtro federado como a técnica mais promissora para fusão de dados em sistemas distribuídos em navegação. No entanto, o trabalho de Qui, Zhang e Jin (2004) mostra que, embora o filtro mestre no algoritmo federado possua estimativa ótima, ou seja, produza a estimativa do filtro global, os filtros locais contam com estimativas sub-ótimas exceto na realimentação, fato ocasionado pela existência de correlação entre as estimativas de cada nó. Adicionalmente, em alguns casos, o algoritmo poderá divergir, principalmente na existência de falhas nos sensores. Cardoso (2003) analisa um método similar ao filtro federado propondo um algoritmo que busca identificar o ganho ótimo utilizando as informações oriundas da rede. Lá, as estimativas do filtro de cada nó são enviadas a um nó de processamento central para fundi-las e então repassar a nova estimativa global com sua covariância de volta para os nós. Estas duas abordagens, embora apresentem robustez maior devido à presença de um número maior de sensores, ainda estão condicionadas a um ponto crítico de falha, dado que, se o processador central que recebe informações de toda a rede falhar, o processo de fusão e estimação pelo nó central irá cessar. Além disso, a suposição que existe um nó central se comunicando com cada nó local pode ser computacionalmente muito restritiva, limitando a abordagem a redes com número reduzidos de nós. Dois métodos, então, são propostos por Qui, Zhang e Jin (2004) a fim de evitar o envio de informação do nó central para os nós locais conforme é feito no filtro federado, assim diminuindo a quantidade de dados trafegando pela rede e aumentando a robustez frente a falhas no processo dinâmico (QUI; ZHANG; JIN, 2004).

Uma abordagem diferente da utilizada nos algoritmos mencionados seria trocar medidas, ao invés de estimativas dos nós, como, por exemplo, a matriz de medição, a medida bruta dos sensores e a matriz de covariância do ruído de medição. Utilizando essa abordagem, Olfati-Saber (2007) propôs um algoritmo que, através de transmissão de informações relacionadas às medidas, consegue computar duas grandezas que foram chamadas de vetor de medida médio e matriz de covariância média da rede. De posse desses valores, os nós podem executar a atualização do filtro e obter a estimativa global. Esse processo de difusão de informação para o cálculo de determinadas grandezas que irão auxiliar na obtenção da estimativa global é chamado de algoritmo consensual. Então, utilizando um algoritmo consensual, os nós conseguem atingir a estimativa global sem a necessidade de um filtro central, melhorando a robustez do sistema a ocorrências de falhas locais e tornando o cenário mais realista, uma vez que um filtro central simultaneamente conectado a todos os nós não é mais necessário.

A quantidade de informações que devem ser trocadas entre os nós para que a rede atinja um consenso poderá ser muito grande. Em alguns casos, não existirá tempo suficiente para que o consenso seja atingido entre dois instantes de amostragem. Para evitar isso, Cattivelli, Lopes e Sayed (2008) propuseram um algoritmo que produz um ganho na acurácia da estimativa de maneira assintótica, sem a necessidade de diversos passos de comunicação entre os instantes de amostragem. Para tal, é necessário que, em um primeiro momento, os nós troquem com as suas vizinhanças os dados dos seus sensores no instante atual. Após receberem essas informações e executarem a atualização, os nós trocam as suas estimativas para que seus vizinhos realizem uma combinação convexa destes vetores. Entretanto, esta abordagem não assegura que as estimativas dos nós convergirão para a estimativa global, apenas que a estimativa obtida possuirá acurácia superior a da estimativa local.

Para sistemas com poucos nós, o algoritmo consensual pôde ser alterado para uma transmissão de medidas e suas respectivas estatísticas com uma identificação única indicando o instante e o nó onde ela foi gerada (CHAGAS; WALDMANN, 2009). Nesse caso, em cada instante de tempo, os nós possuirão um conjunto de vetores de medidas e suas respectivas estatísticas e devem fundi-los segundo o algoritmo de atualização do filtro de Kalman. Dessa forma, se o consenso for suficientemente amplo, ou seja, se existir uma quantidade suficiente de etapas de transmissão de informações, cada nó terá acesso a cada medida gerada pela rede em todos os instantes, gerando, assim, a estimativa ótima (CHAGAS; WALDMANN, 2009). Caso contrário, os nós terão acesso a apenas uma parte das medidas, gerando uma estimativa com qualidade inferior a do filtro global, mas melhor que a estimativa local. Esses resultados se baseiam no fato que um número maior de sensores funcionando corretamente melhora, estatisticamente, a qualidade da estimação (MAYBECK, 1979).

Para que os algoritmos mencionados funcionem corretamente, deve-se assumir que as características estocásticas, tanto do processo como dos sensores da rede, são conhecidas pelos nós. Em aplicações reais, isso dificilmente é verdadeiro. Além disso, suposições como o ruído de um sensor em determinado nó ser descorrelacionado do ruído nos outros podem falhar. Quando isso ocorre, a estimativa ótima não poderá ser atingida e, em alguns casos, a fusão de dados com informações estocásticas incorretas poderá ocasionar a divergência dos filtros na rede. Entretanto, alguns algoritmos foram construídos para fornecer uma estimativa que, embora seja sub-ótima, não irá divergir. Entre eles, pode-se citar a intersecção de covariância, desenvolvida em Julier e Uhlmann (1997b).

Um problema que poderá estar presente em redes de sensores distribuídos é o atraso na comunicação entre os nós. Quando um nó enviar informação aos seus vizinhos, devido à propagação pela rede, esta informação chegará atrasada a nós mais distantes. Em alguns casos, esse atraso poderá ser tão significativo que a incorporação ingênua desta medida atrasada levará a estimativa a divergir (CHAGAS; WALDMANN, 2010; CHAGAS; WALDMANN, 2012b).

Existem diversos trabalhos sobre a incorporação de medidas atrasadas em um filtro de Kalman no problema local, não distribuído. Pode-se citar, por exemplo, a compilação feita por Tasoulis, Adams e Hand (2010). No entanto, a extensão de tais algoritmos para o âmbito da estimação distribuída não é trivial. Quanbo e Chenglin (2008) e Wang e Shen (2008) verificaram, independentemente, como informações atrasadas podem ser incorporadas de forma ótima em uma rede de sensores possuindo um nó central de fusão, sendo as informações trocadas as estimativas do estado em cada nó. Para o caso em que medidas são enviadas e sem a existência de um nó central de fusão, pode-se citar a compilação de algoritmos para fusão de medidas fora de ordem em um filtro de Kalman feita por Besada-Portas *et al.* (2009). Entretanto, todos os algoritmos presentes buscam atingir a estimativa ótima, definida nesse caso como aquela que seria obtida se as medidas não possuíssem atrasos. Tais algoritmos necessitam armazenar uma grande quantidade de informação e requerem um alto poder computacional devido às recursões que devem ser realizadas a cada instante de amostragem. Já Chagas e Waldmann (2010) e Chagas e Waldmann (2012b) propuseram algoritmos sub-ótimos que reduzem significativamente a carga computacional e a necessidade de memória, fornecendo performance satisfatória nos cenários estudados relativos a redes de sensores distribuídos em que a troca de informação entre os nós ocorre com atrasos.

Para os casos em que o modelo não é linear nem gaussiano, podem ser aplicadas as mesmas técnicas utilizadas na filtragem distribuída com algoritmos sub-ótimos baseados na filtragem de Kalman, como, por exemplo, o filtro Estendido de Kalman ou o filtro Unscented. No entanto, alguns trabalhos estudaram a filtragem distribuída com algoritmos baseados em técnicas de Monte Carlo sequenciais, ou filtros de partículas, como, por exemplo, Coates (2004), Bordin e Bruno (2008), Bordin e Bruno (2009), Farahmand, Roumeliotis e Giannakis (2010), Uztebay, Coates e Rabat (2010), Bordin e Bruno (2011), Mohammadi e Asif (2011), Mohammadi e Asif

(2012) e Dias e Bruno (2012). No problema anterior, com a utilização do filtro de Kalman, o ruído de medição era gaussiano; logo, completamente determinado pelos dois primeiros momentos estatísticos. Já no caso mais geral, que motiva a utilização do filtro de partículas, os ruídos existentes podem possuir qualquer distribuição de probabilidades. Tal generalização traz uma série de complicações na troca de informações através da rede.

1.1 Estimação Distribuída em Redes em que os Nós não Compartilham o Modelo Dinâmico

A maior parte da teoria desenvolvida até agora e brevemente mencionada acerca de estimação distribuída em rede de sensores utilizando filtros recursivos assume que existe um único processo sendo mensurado pelos sensores locais aos nós. Dessa forma, todos os nós compartilham o mesmo vetor de estado. Entretanto, problemas interessantes na engenharia inercial não satisfazem essa restrição. Pode-se citar o trabalho de Borreli, Keviczky e Balas (2004), em que estudaram técnicas de controle para voo em formação de uma frota de veículos aéreos não tripulados (VANTs), os trabalhos de Fergunson *et al.* (2002) e Fergunson e How (2003), que propõem algumas técnicas de estimação distribuída para um conjunto de satélites em órbita, e os trabalhos de Smith e Hadaegh (2006a), Smith e Hadaegh (2006b) e Azizi e Khorasani (2009), que analisam técnicas de controle e estimação para espaçonaves indo para o espaço profundo. Nesses tipos de problema, o modelo embarcado em cada nó da rede é diferente, pois cada VANT ou satélite, considerado um nó na rede, está estimando o seu vetor de estado e este diferirá de nó para nó. No entanto, as medidas de cada nó poderão conter informações que irão melhorar a estimação do vetor de estado pelos seus nós vizinhos. Entretanto, diversos problemas surgem nesse cenário. Um deles é a impossibilidade de utilização direta dos algoritmos de consenso usuais como Olfati-Saber (2007) ou Cattivelli, Lopes e Sayed (2008). No melhor conhecimento do autor, algoritmos para tais aplicações estão parcialmente desenvolvidos, pois as metodologias revisadas se aplicam apenas a problemas específicos, ou seja, os algoritmos não estão generalizados, como é o caso da estimação distribuída com nós compartilhando o mesmo modelo. Além disso, técnicas para resolver o problema de atrasos na comunicação neste tipo de rede, no melhor conhecimento do autor, ainda não foram estudadas.

Em VANTs, existe uma unidade inercial (IMU, em inglês) responsável por aferir grandezas relacionadas ao movimento da aeronave, a saber, incrementos de velocidade linear e incrementos de ângulo (SALYCHEV, 2004). De posse desses dados, o sistema de navegação inercial (INS, em inglês) resolve um conjunto de equações para prover a solução da navegação, que consiste em determinar a posição, a velocidade e a atitude da aeronave em algum sistema de referência conhecido (SALYCHEV, 2004). Entretanto, erros na IMU fazem com que a solução divirja com o tempo, sendo impossível realizar a navegação com acurácia em longos períodos de tempo. Para contornar isso, constrói-se um modelo de erros e utiliza-se sensores não inerciais, como GPS, magnetômetro, câmera, entre outros, para limitar os erros de navegação (SALYCHEV, 2004). No problema de se estimar distribuidamente os erros de navegação inercial para um conjunto de VANTs em voo, observa-se que os vetores de estados são diferentes em cada nó da rede, pois são relativos aos erros de navegação de cada veículo.

Aqui, estudou-se o problema de estimação distribuída em que cada nó da rede possui um modelo diferente e não há conhecimento completo da rede, ou seja, não se sabe quantos nós existem e nem qual a topologia de suas conexões. Além disso, foi estudado como a estimação distribuída pode ser feita quando as informações trocadas chegam aos nós com atrasos. Dessa forma, foi possível realizar a estimação distribuída dos erros de navegação quando um conjunto de VANTs está voando e eles possuem alguma forma de trocar informações que chegam aos nós de destino com atrasos. Para isso, inicialmente foram desenvolvidos dois algoritmos sub-ótimos para incorporação de medidas atrasadas no caso distribuído em que os nós compartilham o mesmo modelo. Esses algoritmos foram construídos para reduzir a carga computacional da metodologia ótima, conhecida como reiteração do filtro de Kalman. Logo após, estendeu-se esses métodos para o caso em que os nós não compartilham o mesmo modelo e, então, os algoritmos foram utilizados para realizar a estimação distribuída dos erros de navegação em uma frota de VANTs simulados. Cada veículo nos cenários analisados possui um receptor GNSS e um magnetômetro como sensores não-inerciais e trocam através dos canais de comunicação as posições obtidas dos sensores GNSS somadas a uma medida de posição relativa. Simulou-se uma falha do receptor GNSS de um determinado veículo e, nesse caso, a aeronave possui acesso apenas às medidas atrasadas recebidas da rede e à medida de seu magnetômetro. Dessa forma, escolheu-se o erro médio quadrático dos componentes do vetor de estado deste veículo como figura de mérito para comparar os algoritmos. Finalmente, verificou-se que os dois algoritmos sub-ótimos propostos limitavam apropriadamente os erros de navegação e possuíam desempenho satisfatório quando comparados à abordagem ótima, considerando a acurácia da estimativa, a carga computacional e a necessidade de memória.

No capítulo 2 está presente a definição do problema que se busca resolver. Adicionalmente, no mesmo capítulo, está contida uma breve introdução sobre estimação distribuída quando os nós compartilham o mesmo modelo e a definição de atrasos na troca de informações entre os nós. No capítulo 3 está presente o desenvolvimento de algoritmos para a fusão de informações atrasadas em rede de sensores. No capítulo 4 encontra-se a análise teórica dos algoritmos com relação à performance, à carga computacional e à necessidade de memória. Além disso, no mesmo capítulo, encontra-se um exemplo numérico simplificado para a validação inicial das metodologias. No capítulo 5 pode ser vista uma breve abordagem para que seja possível a utilização desses algoritmos no caso não-linear; e a extensão dos algoritmos para o caso em que o modelo dinâmico não é compartilhado pelos nós. No capítulo 6 está contida uma proposta para que se possa realizar a estimação distribuída dos erros de navegação quando um conjunto de VANTs está voando e eles possuem acesso a um canal de comunicação para trocar informações. Ainda neste mesmo capítulo, estão presentes várias simulações a respeito desse cenário, que validam os algoritmos desenvolvidos. No capítulo 7 estão contidas as conclusões e trabalhos futuros.

Alguns dos resultados aqui presentes já se encontram publicados em Chagas e Waldmann (2010), Chagas e Waldmann (2012b) e Chagas e Waldmann (2012c).

2 Estimação Distribuída

Neste capítulo, na seção 2.1, encontra-se a definição do problema que se busca resolver. Em seguida, serão apresentados algoritmos e conceitos relacionados à estimação distribuída, abordando, primeiramente, o problema em que os nós compartilham um mesmo modelo linear. Nesse contexto, serão apresentados algoritmos clássicos para o problema em que a comunicação se dá sem atrasos (seções 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5) e, logo após, na seção 2.6, será apresentada a definição do problema de atrasos na troca de informações na rede de sensores.

2.1 Definição do Problema

Esta Tese de Doutorado se propôs a estudar o problema de estimação distribuída dos erros de navegação inercial auxiliada quando a transmissão de informação ocorre com atrasos. O cenário consiste em diversos VANTs voando e trocando informações através de um canal de comunicação. Cada VANT possui seu próprio modelo de erros que, conforme será visto no capítulo 6, pode ser escrito em sua forma discreta, para o i-ésimo VANT, como

$$\mathbf{x}_{k+1,i} = \mathbf{F}_{k,i}\mathbf{x}_{k,i} + \mathbf{u}_{k,i} + \mathbf{G}_{k,i}\mathbf{w}_{k,i} \ , \tag{2.1}$$

onde $\mathbf{x}_{k,i}$ é o vetor de estado, $\mathbf{F}_{k,i}$ é a matriz de transição de estados, $\mathbf{u}_{k,i}$ é o vetor de controle determinístico e conhecido e $\mathbf{G}_{k,i}\mathbf{w}_{k,i}$ é uma sequência ruidosa branca com f.d.p. Gaussiana. Utilizando sensores não-inerciais, pode-se montar o modelo de medição para o i-ésimo VANT como

$$\mathbf{y}_{k,i} = \mathbf{H}_{k,i}\mathbf{x}_{k,i} + \mathbf{v}_{k,i} \ , \tag{2.2}$$

em que $\mathbf{H}_{k,i}$ é a matriz de medição e $\mathbf{v}_{k,i}$ é uma sequência ruidosa branca com f.d.p. Gaussiana.

Neste contexto, foi estudado como as medições atrasadas de um determinado VANT podem ser utilizadas por outro VANT na rede para estimar o seu próprio vetor de estados. Para a solução deste problema, foi necessário desenvolver algoritmos para fusão de medidas atrasadas em uma rede de sensores distribuídos em que o modelo dinâmico não é compartilhado pelos nós. Para isso, primeiramente, desenvolveram-se algoritmos que podem incorporar medidas atrasadas no caso simplificado em que todos os nós compartilham o mesmo modelo dinâmico (capítulos 3 e 4). Após isso, foi estudado como esses algoritmos podem ser estendidos para o caso de interesse, em que os nós não compartilham o mesmo espaço de estados (capítulo 5). Finalmente, os algoritmos resultantes foram aplicados ao cenário descrito neste capítulo e foi verificado que os erros de navegação foram corretamente estimados de forma distribuída (capítulo 6).

2.2 Modelagem da Estimação Distribuída quando os Nós Compartilham o Modelo Dinâmico

Cada nó da rede efetuará medições relacionadas a um processo em comum. Dessa forma, o modelo dinâmico do processo é compartilhado pela rede e indicado por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \ , \tag{2.3}$$

em que $\mathbf{F}_k$ denota uma matriz de transição de estado $M \times M$ que descreve a dinâmica do sistema, $\mathbf{B}_k \mathbf{u}_k$ é o vetor de controle determinístico e conhecido de dimensão $M \times 1$ e $\mathbf{G}_k \mathbf{w}_k$ é uma sequência ruidosa branca de dimensão $M \times 1$ com matriz de covariância $\mathbf{Q}_k$. Esse modelo é válido para cada i-ésimo nó da rede, $i \in [1, 2, 3, \ldots, q]$.

Cada i-ésimo nó, $i \in [1, 2, 3, \ldots, q]$, possui um conjunto de sensores que realizam a medição do vetor de estados no instante k

$$\mathbf{y}_{k,i} = \mathbf{H}_{k,i} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{k,i} \ , \tag{2.4}$$

em que $\mathbf{H}_{k,i}$ é uma matriz $N_i \times M$ e $\mathbf{v}_{k,i}$ indica um ruído de medição, sendo uma sequência ruidosa branca de dimensão $N_i \times 1$ e matriz de covariância $\mathbf{R}_{k,i}$. Aqui adota-se que o ruído de medição entre os sensores da rede são independentes entre si e também não apresentam dependência com o ruído de modelagem. Caso isso não seja verdade, o cálculo da correlação cruzada poderá ser difícil de realizar e incorporar as medidas de forma ingênua poderá levar o processo de estimação à divergência. Nesse caso, pode-se aplicar o algoritmo sub-ótimo chamado de intersecção de covariâncias (JULIER; UHLMANN, 1997b) para fusão de medidas correlacionadas entre si cuja correlação cruzada seja desconhecida.

O estado inicial do sistema é definido como uma variável aleatória $\mathbf{x}_0$ com média $\mathbf{m}_0$ e matriz de covariância $\mathbf{P}_0$ que é independente de todos os ruídos dos sensores $\mathbf{v}_{k,i}$ e dos ruídos de modelagem $\mathbf{G}_k\mathbf{w}_k$, $i \in [1,2,3,\ldots,q]$ e $k > 0$.

2.3 Troca de Informações entre os Nós

Existem, basicamente, dois métodos de troca de informações entre os nós: os que se baseiam na troca das estimativas (CARDOSO, 2003; CARLSON, 1988; FELTER, 1990; QUI; ZHANG; JIN, 2004; KAR; MOURA, 2011; KAR *et al.*, 2011) e os que se baseiam na troca das medidas (RIBEIRO; GIANNAKIS; ROUMELIOTIS, 2006; OLFATI-SABER, 2007; CATTIVELLI; LOPES; SAYED, 2008; CHAGAS; WALDMANN, 2009). Apesar de o escopo ter sido definido como o do problema com o mesmo modelo dinâmico sendo compartilhado por todos os nós, aqui serão estudados métodos baseados na troca das medidas porque são mais promissores para a extensão ao caso em que os nós não compartilham o mesmo modelo, conforme será visto no capítulo 5.

2.4 Filtro de Kalman Global (FKG)

A melhor estimativa da rede, no sentido estatístico de mínimo erro médio quadrático, seria obtida se existisse um nó central com acesso às medidas de todos os sensores na rede. Esse nó fictício iterando o filtro de Kalman global (FKG) será analisado nessa seção, pois a estimação distribuída pela rede buscará atingir o desempenho alcançado por esse filtro. A equação de medição do FKG é dada por

$$\begin{cases} \mathbf{y}_k^g = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k,1}^T & \mathbf{y}_{k,2}^T & \dots & \mathbf{y}_{k,q}^T \end{bmatrix}^T , \\ \mathbf{H}_k^g = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k,1}^T & \mathbf{H}_{k,2}^T & \dots & \mathbf{H}_{k,q}^T \end{bmatrix}^T , \\ \mathbf{v}_k^g = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{k,1}^T & \mathbf{v}_{k,2}^T & \dots & \mathbf{v}_{k,q}^T \end{bmatrix}^T , \\ \mathbf{R}_k^g = diag \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k,1} & \mathbf{R}_{k,2} & \dots & \mathbf{R}_{k,q} \end{bmatrix} , \\ \mathbf{y}_k^g = \mathbf{H}_k^g \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^g , \end{cases} \tag{2.5}$$

onde se deve notar que a matriz de covariância do ruído de medição global $\mathbf{R}_k^g$ foi considerada diagonal por blocos devido à hipótese que os ruídos de medição em sensores localizados em diferentes nós são independentes. Assume-se que o nó central tem conhecimento das matrizes de medida $\mathbf{H}_{k,i}$ e respectivas estatísticas de ruído de medida $\mathbf{R}_{k,i}$ de todos os nós da rede.

Dessa forma, utilizando a forma de informação do filtro de Kalman, pode-se escrever as equações do FKG:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^g = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^g + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} , \tag{2.6}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^g = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1}^g \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} , \tag{2.7}$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^{g,-1} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{g,-1} + \mathbf{H}_k^{g,T} \mathbf{R}_k^{g,-1} \mathbf{H}_k^g , \tag{2.8}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^g = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^g + \mathbf{P}_{k|k}^g \mathbf{H}_k^{g,T} \mathbf{R}_k^{g,-1} (\mathbf{y}_k^g - \mathbf{H}_k^g \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^g) . \tag{2.9}$$

Aplicando as equações 2.5 nas equações 2.8 e 2.9, obtém-se que

$$\hat{\mathbf{x}}^{g}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}^{g}_{k|k-1} + \mathbf{P}^{g}_{k|k}\left[\sum_{j=1}^{q}\mathbf{H}^{T}_{k,j}\mathbf{R}^{-1}_{k,j}\mathbf{y}_{k,j} - \left(\sum_{j=1}^{q}\mathbf{H}^{T}_{k,j}\mathbf{R}^{-1}_{k,j}\mathbf{H}_{k,j}\right)\hat{\mathbf{x}}^{g}_{k|k-1}\right], \tag{2.10}$$

$$\mathbf{P}^{g,-1}_{k|k} = \mathbf{P}^{g,-1}_{k|k-1} + \left(\sum_{j=1}^{q}\mathbf{H}^{T}_{k,j}\mathbf{R}^{-1}_{k,j}\mathbf{H}_{k,j}\right). \tag{2.11}$$

2.5 Filtro de Kalman Distribuído (FKD)

O objetivo é fazer com que cada nó desempenhe a estimação tão bem quanto o FKG, pois essa é, estatisticamente, a melhor estimativa possível de ser obtida na rede. Como o modelo dinâmico é idêntico nos nós, o passo de predição de todos eles apresenta o mesmo equacionamento, análogo às equações 2.6 e 2.7. Daí, analisando as equações de atualização do filtro global 2.10 e 2.11, percebe-se que os nós produziriam a mesma estimativa do FKG se conseguirem calcular as grandezas (OLFATI-SABER, 2007)

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{f}_{k} = \sum_{j=1}^{q}\mathbf{H}^{T}_{k,j}\mathbf{R}^{-1}_{k,j}\mathbf{y}_{k,j} = \left(\sum_{j=1}^{q}\mathbf{H}^{T}_{k,j}\mathbf{R}^{-1}_{k,j}\mathbf{H}_{k,j}\right)\mathbf{x}_{k} + \sum_{j=1}^{q}\mathbf{H}^{T}_{k,j}\mathbf{R}^{-1}_{k,j}\mathbf{v}_{k,j}, \\ \mathbf{R}^{f}_{k} = cov\{\mathbf{y}^{f}_{k}\mathbf{y}^{f,T}_{k}\} = \left(\sum_{j=1}^{q}\mathbf{H}^{T}_{k,j}\mathbf{R}^{-1}_{k,j}\mathbf{H}_{k,j}\right) \end{cases} \tag{2.12}$$

em todo o instante $k > 0$, assumindo que o FKG e os filtros locais apresentam a mesma inicialização.

Observando isso, o i-ésimo nó da rede deverá enviar a seus vizinhos o seu vetor de medidas transformado

$$\mathbf{y}^{s}_{k,i} = \mathbf{H}^{T}_{k,i}\mathbf{R}^{-1}_{k,i}\mathbf{y}_{k,i} \tag{2.13}$$

e respectiva covariância

$$\mathbf{R}^s_{k,i} = \mathbf{H}^T_{k,i}\mathbf{R}^{-1}_{k,i}\mathbf{H}_{k,i}. \tag{2.14}$$

Como a rede não é totalmente conexa, as informações não chegam a todos os nós da rede. Para que essas informações se propaguem além da vizinhança de um nó, para o resto da rede, utilizam-se algoritmos de consenso, como, por exemplo, o apresentado em Ribeiro, Giannakis e Roumeliotis (2006), Olfati-Saber (2007), Cattivelli, Lopes e Sayed (2008) ou Chagas e Waldmann (2009).

Em problemas reais, talvez não exista tempo suficiente entre os instantes de amostragem para que o algoritmo de consenso consiga propagar a informação através de toda a rede e propiciar aos nós a possibilidade de alcançar o desempenho da estimativa global ótima. Alguns algoritmos propõem métodos de consenso que buscam atingir a estimativa global de maneira assintótica, conforme as iterações do filtro vão ocorrendo. Cattivelli, Lopes e Sayed (2008), por exemplo, propuseram um método que através do envio de informações relativas às medidas e uma combinação convexa das estimativas permite que a estimativa global seja assintoticamente atingida por cada nó conforme o tempo passa. Entretanto, o algoritmo proposto em Cattivelli, Lopes e Sayed (2008) não considera que as informações são trocadas com atrasos e não está adaptado para redes em que os nós não compartilham o mesmo modelo dinâmico. Neste trabalho, portanto, não se busca encontrar um algoritmo consensual. Considera-se-á que cada nó enviará a seus vizinhos toda a informação conhecida e o processo não irá esperar o tempo necessário para que o consenso ocorra. Dessa forma, algoritmos serão desenvolvidos para incorporar as informações atrasadas que chegarem ao nó devido à troca de dados mencionada. Em outras palavras, a fusão ocorrerá a cada instante de amostragem considerando toda a informação que o nó possuir, atrasada ou não. Como será visto posteriormente, essa abordagem permitirá utilizar algoritmos de filtragem distribuída em rede de sensores cuja comunicação ocorre com atrasos e em que o modelo dinâmico não é compartilhado pelos nós. Isto não é possível nos algoritmo consensuais que seguem o padrão daqueles propostos por Ribeiro, Giannakis e Roumeliotis (2006), Olfati-Saber (2007), Cattivelli, Lopes e Sayed (2008) ou Chagas e Waldmann (2009).

Seja Ξ_k o conjunto de todas as medições geradas pelos sensores da rede no instante k. Então, pode-se considerar que, em cada instante k, o i-ésimo nó possui um conjunto de medidas $\boldsymbol{\nu}_k^i \subseteq \Xi_k$ provindas dos demais nós em sua vizinhança. Para o caso em que nenhuma medida está atrasada, o i-ésimo nó gerará uma medida fundida para atualização do seu filtro de acordo com

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{k,i}^f = \sum_{j \in \nu_k^i} \mathbf{H}_{k,j}^T \mathbf{R}_{k,j}^{-1} \mathbf{y}_{k,j} = \left(\sum_{j \in \nu_k^i} \mathbf{H}_{k,j}^T \mathbf{R}_{k,j}^{-1} \mathbf{H}_{k,j} \right) \mathbf{x}_k + \sum_{j \in \nu_k^i} \mathbf{H}_{k,j}^T \mathbf{R}_{k,j}^{-1} \mathbf{v}_{k,j} \, , \\ \mathbf{R}_{k,i}^f = cov\{\mathbf{y}_{k,i}^f \mathbf{y}_{k,i}^{f,T}\} = \left(\sum_{j \in \nu_k^i} \mathbf{H}_{k,j}^T \mathbf{R}_{k,j}^{-1} \mathbf{H}_{k,j} \right) \, . \end{cases} \tag{2.15}$$

Quanto maior a diversidade da informação no conjunto de medidas recebidas no i-ésimo nó, melhor será o ganho na estimação desde que os sensores não possuam falhas (MAYBECK, 1979). Finalmente, se um determinado nó possuir acesso a todas as medidas em todos os instantes, ele gerará a mesma estimativa do filtro global.

2.6 Fusão de Medidas Atrasadas em Rede de Sensores

Diversos algoritmos foram desenvolvidos no intuito de fundir medidas atrasadas com a presença de múltiplos sensores. Pode-se citar, por exemplo, a compilação feita por Besada-Portas *et al.* (2009). Entretanto, os algoritmos apresentados buscam atingir a estimativa ótima, definida como a que seria obtida se uma medida atrasada fosse recebida no instante de sua aferição. Esses tipos de algoritmos demandam recursões que incorrem em uma elevada carga computacional e grande necessidade de armazenamento, que crescem conforme o atraso das medidas aumenta. Nos problemas de interesse, é esperado que medidas sejam recebidas com atrasos na ordem de milhares de instantes de amostragem, o que impossibilitaria o uso de tais algoritmos em aplicações de baixo custo. Dessa forma, o desenvolvimento de algoritmos computacionalmente mais leves, mesmo que sub-ótimos, é necessário. Isto é feito no capítulo 3.

2.6.1 Definição de Atraso nas Medidas

Primeiramente, define-se o que será considerado uma medida atrasada. Os sistemas considerados são discretizados e apresentam uma dada taxa de amostragem. Assim, é coerente definir que um atraso não-negligenciável ocorre quando a medida recebida tiver sido auferida com um atraso maior ou igual a um período de amostragem (TASOULIS; ADAMS; HAND, 2010). Caso contrário, chamar-se-á o atraso de negligenciável e a fusão de medidas poderá ser feita como no caso ideal, visto nas seções anteriores. Assim, toda medida recebida possuirá um atraso Δ_n que será um múltiplo do período de amostragem. O conjunto $\boldsymbol{\nu}_k^i$ é, então, particionado em subconjuntos $\boldsymbol{\nu}_{k,\Delta_n}^i$, cada um com todas as medidas recebidas pelo nó i no instante k com um atraso de Δ_n períodos de amostragem. Para cada subconjunto, o respectivo vetor de medidas atrasadas fundidas é criado, observando que, dentro desses subconjuntos, todas as medidas são relativas a um mesmo instante. Considerando 2.15, obtém-se

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{k,\Delta_n,i}^f = \sum\limits_{j\in\nu_{k,\Delta_n}^i} \mathbf{H}_{k-\Delta_n,j}^T \mathbf{R}_{k-\Delta_n,j}^{-1} \mathbf{y}_{k-\Delta_n,j} = \left(\sum\limits_{j\in\nu_{k,\Delta_n}^i} \mathbf{H}_{k-\Delta_n,j}^T \mathbf{R}_{k-\Delta_n,j}^{-1} \mathbf{H}_{k-\Delta_n,j} \right) \mathbf{x}_{k-\Delta_n} + \\ \quad + \sum\limits_{j\in\nu_{k,\Delta_n}^i} \mathbf{H}_{k-\Delta_n,j}^T \mathbf{R}_{k-\Delta_n,j}^{-1} \mathbf{v}_{k-\Delta_n,j} = \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^f \mathbf{x}_{k-\Delta_n} + \mathbf{v}_{k,\Delta_n,i}^f \,, \\ \mathbf{R}_{k,\Delta_n,i}^f = cov\{\mathbf{y}_{k,\Delta_n,i}^f \mathbf{y}_{k,\Delta_n,i}^{f,T}\} = \left(\sum\limits_{j\in\nu_{k,\Delta_n}^i} \mathbf{H}_{k-\Delta_n,j}^T \mathbf{R}_{k-\Delta_n,j}^{-1} \mathbf{H}_{k-\Delta_n,j} \right) = \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^f \,, \end{cases} \tag{2.16}$$

sendo $0 \leq \Delta_0 < \Delta_1 < \cdots < \Delta_L \leq max$, onde max é o atraso máximo que poderá ser fundido. Tal definição se faz necessária porque, conforme será visto posteriormente, os métodos aqui estudados demandam o armazenamento de informações e a quantidade de memória disponível para tal é finita (BESADA-PORTAS *et al.*, 2009; GOPOLAKRISHNAN; KAISARE; NARASIMHAN, 2011). Note que o sobrescrito f indica que a variável é uma informação gerada através da fusão de informações oriundas de nós na rede e o subscrito k, Δ_n, i indica que essa informação foi recebida no instante k com um atraso de Δ_n no i-ésimo nó. Finalmente, o problema se reduz a fundir no instante k os novos vetores de medidas $\mathbf{y}^f_{k,\Delta_n,i}$, $n \in [0, 1, \ldots, L]$.

Observe que, além da transmissão pelos nós de informações relativas às medidas, a saber, $\mathbf{H}^T_{k,i}\mathbf{R}^{-1}_{k,i}\mathbf{y}_{k,i}$ e $\mathbf{H}^T_{k,i}\mathbf{R}^{-1}_{k,i}\mathbf{H}_{k,i}$, a rede precisa possuir algum meio de identificar o instante em que esta informação foi gerada, na precisão do período de amostragem do sistema, e de qual nó ela é oriunda. A primeira informação pode ser obtida através do relógio de um receptor GNSS e a segunda através de um endereço único do nó na rede. A inserção da identificação do nó de origem e da estampa de tempo na informação transmitida pela rede será considerada como resolvida e não será estudada aqui.

3 Algoritmos para Fusão de Medidas Atrasadas em Rede de Sensores Distribuídos

Neste capítulo serão descritos três métodos para fusão de medidas atrasadas em rede de sensores. O primeiro, apresentado na seção 3.1, se baseia na reiteração do filtro de Kalman e consiste em um algoritmo ótimo por construção com elevada carga computacional e necessidade de armazenamento (GOPOLAKRISHNAN; KAISARE; NARASIMHAN, 2011). O segundo método, estendido de Chagas e Waldmann (2010) e mostrado na seção 3.2, foi baseado no método proposto por Larsen *et al.* (1998). O método original foi desenvolvido para fundir uma única medida atrasada no problema não-distribuído. Dessa forma, foi proposta uma extensão para que o algoritmo resultante pudesse incorporar múltiplas medidas com atrasos distintos, o que possibilitou o seu uso no ambiente distribuído. Além disso, verificou-se que o estimador original em Larsen *et al.* (1998) possui viés, que foi removido utilizando uma abordagem Bayesiana proporcionando um ganho significativo de desempenho. O algoritmo resultante é sub-ótimo, impõe uma carga computacional menor do que a abordagem clássica, mas ainda requer uma grande quantidade de memória. Finalmente, o terceiro método, adaptado das metodologias em Brown e Hartman (1968) e Bar-Shalom *et al.* (2002) e apresentado na seção 3.3, reduz drasticamente a necessidade de armazenamento enquanto que a carga computacional continua inferior à da metodologia ótima, mas superior à do segundo método. Esta nova abordagem estendeu o algoritmo inicialmente proposto em Brown e Hartman (1968), chamado de *delayed state Kalman filter*, para que fosse possível a incorporação concorrente de múltiplas medidas com atrasos distintos, fazendo-o aplicável ao problema de estimação distribuída tratado aqui.

3.1 Abordagem Clássica - Reiteração do Filtro de Kalman (AC)

A abordagem clássica pode ser considerada como a reiteração do filtro de Kalman para incorporar medidas atrasadas (GOPOLAKRISHNAN; KAISARE; NARASIMHAN, 2011). Consiste em voltar o algoritmo do filtro ao instante em que a medida atrasada deveria ter sido incorporada (momento em que ela foi auferida) e recalcular cada iteração até que se chegue ao instante presente. Esse método assegura a otimalidade da estimativa, mas é claro que a carga computacional se torna alta à medida que aumenta o atraso na medida.

Se for adotado que todo o nó tem acesso direto à matriz de dinâmica do modelo e à matriz de covariância do ruído de medição em todo o instante (BESADA-PORTAS *et al.*, 2009), então cada nó precisará armazenar: os vetores de medição com respectivas estatísticas; os estados estimados com suas covariâncias preditas; e os vetores de controle. Caso os nós não possuam acesso às matrizes mencionadas no início do parágrafo, elas também devem ser armazenadas. Todas essas informações devem estar disponíveis entre o instante de amostragem em que a medida atrasada foi auferida e o instante atual. Conforme mencionado, um atraso máximo admissível deve ser definido. Se uma medida mais atrasada que este limiar for recebida pelo nó, então ela será descartada.

Sejam $\mathbf{y}^{ac}_{k-\Delta_n,i}$ e $\mathbf{R}^{ac}_{k-\Delta_n,i}$ o vetor de medidas e sua respectiva estatística, os quais foram utilizados para a atualização do filtro no instante $k-\Delta_n$. Então, o algoritmo para a incorporação dos vetores $\mathbf{y}^{f}_{k,\Delta_n,i}$, $n \in [0,1,\ldots,L]$, no instante k para o nó i está presente a seguir, onde a implementação foi baseada no algoritmo IFAsyn (*Information Filter for Asynchronous measurements*), que proveu a menor carga computacional entre os algoritmos ótimos estudados em Besada-Portas *et al.* (2009).

- $j = \Delta_L$, $n = L$
- WHILE $j \geq 0$
  - IF $j = \Delta_n$ THEN
    - $n = n - 1$
    - $\mathbf{y}^{d}_{k,j,i} = \mathbf{y}^{ac}_{k-j,i} + \mathbf{y}^{f}_{k,j,i}$
    - $\mathbf{R}^{d}_{k,j,i} = \mathbf{R}^{ac}_{k-j,i} + \mathbf{R}^{f}_{k,j,i}$
  - ELSE
    - $\mathbf{y}^{d}_{k,j,i} = \mathbf{y}^{ac}_{k-j,i}$
    - $\mathbf{R}^{d}_{k,j,i} = \mathbf{R}^{ac}_{k-j,i}$
  - ENDIF
  - Usando $\mathbf{y}^{d}_{k,j,i}$, $\mathbf{R}^{d}_{k,j,i}$, $\hat{\mathbf{x}}_{k-j|k-j-1,i}$, e $\mathbf{P}_{k-j|k-j-1,i}$ aplique o passo de atualização do filtro de Kalman e sobrescreva $\hat{\mathbf{x}}_{k-j|k-j,i}$ e $\mathbf{P}_{k-j|k-j,i}$.
  - Aplique o passo de propagação do filtro de Kalman e sobrescreva $\hat{\mathbf{x}}_{k-j+1|k-j,i}$ e $\mathbf{P}_{k-j+1|k-j,i}$.
  - $\mathbf{y}^{ac}_{k-j,i} = \mathbf{y}^{d}_{k,j,i}$
  - $\mathbf{R}^{ac}_{k-j,i} = \mathbf{R}^{d}_{k,j,i}$

  - j = j - 1

- ENDWHILE

Se nenhuma medida com atraso maior que *max* for recebida pelo nó, a otimalidade desse algoritmo é assegurada por construção, uma vez que, após a sua execução, o FKD no *i*-ésimo nó obterá no instante *k* exatamente a mesma estimativa que seria obtida se nenhuma medida fosse recebida com atraso.

A carga computacional desse método é extremamente elevada. Observando o algoritmo, verifica-se que a carga computacional cresce significativamente com o atraso máximo a ser incorporado. Por exemplo, se apenas uma medida atrasada de uma quantidade *n* de intervalos de amostragem chegar ao *i*-ésimo nó no instante *k*, o algoritmo terá que executar *n* passos de atualização e predição do filtro de Kalman. Nas próximas seções, são mostrados dois algoritmos sub-ótimos que reduzem significativamente a carga computacional.

3.2 Uma Abordagem baseada na Extrapolação de Medidas (EM)

Partindo do método de extrapolação de medidas em Larsen *et al.* (1998), será desenvolvida uma nova metodologia para incorporar medidas atrasadas em sistemas distribuídos. Essa nova abordagem não necessitará da iteração de um algoritmo recursivo, conforme a reiteração do filtro de Kalman, e, comparando com a abordagem anterior, apresentará carga computacional que será relativamente menor quanto mais atrasadas forem as medidas incorporadas.

Segundo o estudo de Tasoulis, Adams e Hand (2010), em que foram compilados vários métodos para incorporação de medidas atrasadas em um único filtro de Kalman, a abordagem com melhor custo-benefício, analisando carga computacional, qualidade da estimação e quantidade de dados a serem armazenados, foi a extrapolação de medidas. Entretanto, Larsen *et al.* (1998) não estendeu o algoritmo para o caso em que medidas com múltiplos atrasos são recebidas por um nó em uma rede em determinado instante (TASOULIS; ADAMS; HAND, 2010). Esta extensão é necessária para que o algoritmo possa ser utilizado em redes de sensores distribuídos. Uma primeira tentativa foi estudada no trabalho de Chagas e Waldmann (2010) para o problema em que nós diferentes compartilham a mesma matriz de medição e as medidas são fundidas através de ponderações escalares. Aqui, será proposta uma nova forma de se estender o algoritmo, removendo a restrição de que diferentes nós possuem a mesma matriz de medição e evitando a fusão escalar das medidas, o que fornecerá um algoritmo com significativa melhora na acurácia da estimação.

Primeiramente, são extrapolados linearmente até o instante atual todos os vetores de medida atrasados que forem recebidos pelo i-ésimo nó no instante atual. Isto pode ser feito para cada subconjunto de $\boldsymbol{\nu}_k^i$ de acordo com (LARSEN *et al.*, 1998)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_{k,\Delta_n,i}^{f,EXT} &\triangleq \mathbf{y}_{k,\Delta_n,i}^{f} + \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i} = \\
&= \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}\mathbf{x}_{k-\Delta_n} + \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i} + \mathbf{v}_{k,\Delta_n,i}^{f} = \\
&= \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i} + \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{v}_{k,\Delta_n,i}^{f} ,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

em que $\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}$ é o erro de estimação do estado $\mathbf{x}_{k-\Delta_n}$ dado todas as medidas fundidas até o instante $k-\Delta_n-1$, ou seja, $\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i} = \mathbf{x}_{k-\Delta_n} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1}$.

Empilhando os vetores de medidas atrasadas extrapolados, o filtro deverá incorporar o vetor $\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}$ definido como

$$
\mathbf{y}_{k,i}^{u,em} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k,\Delta_0,i}^{f,EXT,T} & \mathbf{y}_{k,\Delta_1,i}^{f,EXT,T} & \dots & \mathbf{y}_{k,\Delta_L,i}^{f,EXT,T} \end{bmatrix}^T .
\tag{3.2}
$$

Com isso, basta agora encontrar a estimativa linear de mínimo erro médio quadrático, ou *Linear Minimium Mean Square Error* (LMMSE), dadas todas as medidas fundidas até o instante $k-1$ e o vetor $\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}$. Sabe-se que a estimativa LMMSE é dada por (BAR-SHALOM; LI; KIRUBARAJAN, 2001)

$$
\begin{cases}
\hat{\mathbf{x}}_{k|k,i} = E\{\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i},\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}\} = E\{\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} + \mathbf{C}_{k,i}^{xy}\mathbf{C}_{k,i}^{yy,-1}(\mathbf{y}_{k,i}^{u,em} - E\{\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\})\ , \\
\mathbf{C}_{k,i}^{xy} = E\{(\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\})(\mathbf{y}_{k,i}^{u,em} - E\{\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\})^T|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}\ , \\
\mathbf{C}_{k,i}^{yy} = E\{(\mathbf{y}_{k,i}^{u,em} - E\{\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\})(\mathbf{y}_{k,i}^{u,em} - E\{\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\})^T|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}\ ,
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

onde $\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}$ é o conjunto de todas as medidas fundidas pelo nó i até o instante $k-1$. Claramente, $\boldsymbol{\Omega}_{k,i} = \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i} \cup \mathbf{y}_{k,i}^{u,em}$.

O cálculo de $E\{\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}$ é executado utilizando

$$
E\{\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} = \begin{bmatrix}
\mathbf{H}_{k,\Delta_0,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{H}_{k,\Delta_0,i}^{f}E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_0|k-\Delta_0-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} \\
\mathbf{H}_{k,\Delta_1,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{H}_{k,\Delta_1,i}^{f}E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_1|k-\Delta_1-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} \\
\vdots \\
\mathbf{H}_{k,\Delta_L,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{H}_{k,\Delta_L,i}^{f}E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_L|k-\Delta_L-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}
\end{bmatrix}
\tag{3.4}
$$

e sua prova pode ser encontrada no apêndice A.

Observe que

$$
\begin{aligned}
E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} &= E\{\mathbf{x}_{k-\Delta_n} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} = \\
&= E\{\mathbf{x}_{k-\Delta_n}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i} = \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}\ ,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

ou seja, $E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}|\Omega_{k-1,i}\}$ é a diferença entre a estimativa propagada do filtro no instante $k-\Delta_n$ e a estimativa gerada pelo suavizador para esse mesmo instante considerando todas as medidas fundidas até o instante anterior, a saber, $k-1$.

Para simplificação da notação nos cálculos da covariância, considere

$$\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m|\boldsymbol{\Omega}_{j,i}) \triangleq E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-n|j,i}\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|j,i}|\boldsymbol{\Omega}_{j,i}\} \ , \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m|\boldsymbol{\Omega}_{j,i}) & \triangleq \mathbf{H}^f_{k,n,i}E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-n|j,i}\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|j,i}|\boldsymbol{\Omega}_{j,i}\}\mathbf{H}^{f,T}_{k,m,i} = \\ & = \mathbf{H}^f_{k,n,i}\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m|\boldsymbol{\Omega}_{j,i})\mathbf{H}^{f,T}_{k,m,i} \ , \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde claramente se tem $\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(n;n|\boldsymbol{\Omega}_{j,i}) = \mathbf{P}_{k-n|j,i}$.

Dessa forma, o cálculo das covariâncias fornece

$$\mathbf{C}^{xy}_{k,i} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_0|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_0,i})^T \\ \vdots \\ (\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_n|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_n,i})^T \\ \vdots \\ (\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_L|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_L,i})^T \end{bmatrix}^T \ , \tag{3.8}$$

$$
\mathbf{C}_{k,i}^{yy} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_0;\Delta_0|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) & \cdots & \hat{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_0;\Delta_n|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) & \cdots & \hat{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_0;\Delta_L|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{M}}_{k,i}^T(\Delta_0;\Delta_n|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) & \cdots & \hat{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_n;\Delta_n|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) & \cdots & \hat{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_n;\Delta_L|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{M}}_{k,i}^T(\Delta_0;\Delta_L|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) & \cdots & \hat{\mathbf{M}}_{k,i}^T(\Delta_n;\Delta_L|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) & \cdots & \hat{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_L;\Delta_L|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k,\Delta_0,i}^{f} & \cdots & \mathbf{0}_{M\times M} & \cdots & \mathbf{0}_{M\times M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{M\times M} & \cdots & \mathbf{R}_{k,\Delta_n,i}^{f} & \cdots & \mathbf{0}_{M\times M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{M\times M} & \cdots & \mathbf{0}_{M\times M} & \cdots & \mathbf{R}_{k,\Delta_L,i}^{f} \end{bmatrix}, \tag{3.9}
$$

sendo a prova encontrada nos apêndices B e C, respectivamente.

Então, com o cálculo das equações 3.4, 3.8 e 3.9, pode-se computar a estimativa LMMSE através de 3.3 para fundir o vetor $\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}$. Entretanto, o cálculo das grandezas expressas em 3.4, 3.8 e 3.9 envolve computar os vetores suavizados e, para isso, devem ser utilizados algoritmos recursivos que trarão uma carga computacional elevada, comparável à reiteração do filtro de Kalman. Uma forma eficiente de computar tais valores pode ser encontrada em Zhang, Li e Zhu (2005).

3.2.1 Aproximações de Larsen

Para reduzir a carga computacional do método, serão feitas aproximações. Visando que o método seja equivalente ao estudo publicado em Larsen *et al.* (1998) no caso em que apenas uma medida chega ao nó em um determinado instante, deve-se realizar duas aproximações:

$$E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} \approx \mathbf{0}_{M\times 1}, \ \ \forall n \in [0,1,2,\cdots,L] \ , \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}) &\triangleq E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-n|k-1,i}\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|k-1,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} \approx \\
&\approx E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i}\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|k-m-1,i}|\mathbf{\Omega}_{k-max(m,n)-1,i}\} \triangleq \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m) \\
&\forall n \in [0,1,2,\cdots,L], \ \ \forall m \in [0,1,2,\cdots,L] \ , \\
\Rightarrow \hat{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}) &\triangleq \mathbf{H}^f_{k,n,i}\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m|\mathbf{\Omega}_{j,i})\mathbf{H}^{f,T}_{k,m,i} \approx \mathbf{H}^f_{k,n,i}\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m)\mathbf{H}^{f,T}_{k,m,i} \triangleq \mathbf{M}_{k,i}(n;m) \\
&\forall n \in [0,1,2,\cdots,L], \ \ \forall m \in [0,1,2,\cdots,L] \ .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

A primeira aproximação, em 3.10, significa que se está considerando que as medidas entre os instantes $k-\Delta_n-1$ e $k-1$ não contribuem de maneira significativa para estimar o estado no instante $k-\Delta_n$. Em outras palavras, aproxima-se $\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i} \approx \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}$, segundo 3.5. Já na segunda aproximação, em 3.11, despreza-se qualquer medida fundida após $k-max(m,n)-1$ para o cálculo da matriz $\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}$. A validade dessas aproximações dependerá das características dinâmicas do processo a ser tratado e do número de medidas que foram incorporadas entre o momento em que a medida atrasada foi auferida e o instante atual. Conforme será visto a seguir, elas irão prover uma diminuição significativa da carga computacional e fornecerão um algoritmo similar ao proposto por Larsen *et al.* (1998), mas com a capacidade de se incorporar múltiplas medidas com múltiplos atrasos em um mesmo instante.

Com a aproximação em 3.10, utilizando 3.4 obtém-se

$$E\{\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k,\Delta_0,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \\ \mathbf{H}_{k,\Delta_1,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{k,\Delta_L,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \end{bmatrix} . \tag{3.12}$$

Com a aproximação em 3.11, utilizando 3.8 e 3.9 obtém-se

$$\mathbf{C}_{k,i}^{xy} \approx \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_0)\mathbf{H}_{k,\Delta_0,i}^{f,T} & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_n)\mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f,T} & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_L)\mathbf{H}_{k,\Delta_L,i}^{f,T} \end{bmatrix} , \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{k,i}^{yy} \approx & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{k,i}(\Delta_0;\Delta_0) & \cdots & \mathbf{M}_{k,i}(\Delta_0;\Delta_n) & \cdots & \mathbf{M}_{k,i}(\Delta_0;\Delta_L) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{M}_{k,i}^{T}(\Delta_0;\Delta_n) & \cdots & \mathbf{M}_{k,i}(\Delta_n;\Delta_n) & \cdots & \mathbf{M}_{k,i}(\Delta_n;\Delta_L) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{k,i}^{T}(\Delta_0;\Delta_L) & \cdots & \mathbf{M}_{k,i}^{T}(\Delta_n;\Delta_L) & \cdots & \mathbf{M}_{k,i}(\Delta_L;\Delta_L) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k,\Delta_0,i}^{f} & \cdots & \mathbf{0}_{M\times M} & \cdots & \mathbf{0}_{M\times M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{M\times M} & \cdots & \mathbf{R}_{k,\Delta_n,i}^{f} & \cdots & \mathbf{0}_{M\times M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{M\times M} & \cdots & \mathbf{0}_{M\times M} & \cdots & \mathbf{R}_{k,\Delta_L,i}^{f} \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Com isso, uma aproximação da estimativa LMMSE pode ser calculada através de

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k,i} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{C}^{xy}_{k,i}\mathbf{C}^{yy,-1}_{k,i}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}^{f,EXT}_{k,\Delta_0,i} \\ \mathbf{y}^{f,EXT}_{k,\Delta_1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{f,EXT}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}^{u,em}_{k,i}} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_0,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_1,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_L,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \end{bmatrix}\right). \tag{3.15}$$

Definindo $\mathbf{K}_{k,i} := \mathbf{C}^{xy}_{k,i}\mathbf{C}^{yy,-1}_{k,i}$, a atualização da matriz de covariância do filtro de Kalman poderá ser feita através de

$$\mathbf{P}_{k|k,i} = \mathbf{P}_{k|k-1,i} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{C}^{yy}_{k,i}\mathbf{K}^{T}_{k,i} = \mathbf{P}_{k|k-1,i} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{C}^{xy,T}_{k,i}\ . \tag{3.16}$$

Deve-se observar que este método possui um problema quando o posto das matrizes de medição $\mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$, definidas em 2.16, é menor que a dimensão do espaço de estado, o que é costumeiro em problemas reais, dado que, em algumas situações, é impossível a utilização de sensores para medir todos os componentes do vetor de estado. Devido à transformação da medida na equação 2.16, verifica-se que, neste caso, a matriz de covariância do ruído de medições atrasadas fundidas, que é igual à matriz de medições atrasadas fundidas, não será inversível. Consequentemente, a matriz $\mathbf{C}^{yy}_{k,i}$ também não o será. Este problema pode ser contornado substituindo a inversa pela pseudo-inversa (ZHANG; LI; ZHU, 2005). Entretanto, considerando a estrutura das matrizes, pode-se obter um algoritmo computacionalmente mais robusto. Para isso, observe que as matrizes $\mathbf{C}^{xy}_{k,i}$ e $\mathbf{C}^{yy}_{k,i}$ podem ser fatoradas como

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{xy}_{k,i} = \mathbf{M}^{xy}_{k,i}\mathbf{H}^{diag,T}_{k,i} \ , \\ \mathbf{C}^{yy}_{k,i} = \mathbf{H}^{diag}_{k,i}\mathbf{M}^{yy}_{k,i}\mathbf{H}^{diag,T}_{k,i} + \mathbf{R}^{diag}_{k,i} \ , \end{cases} \tag{3.17}$$

onde

$$\mathbf{H}^{diag}_{k,i} \triangleq \mathbf{R}^{diag}_{k,i} \triangleq diag\begin{pmatrix} \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_0,i} & \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_1,i} & \cdots & \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_L,i} \end{pmatrix} \ , \tag{3.18}$$

$$\mathbf{M}^{xy}_{k,i} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_0) & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_n) & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_L) \end{bmatrix} \ , \tag{3.19}$$

$$\mathbf{M}^{yy}_{k,i} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_0;\Delta_0) & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_0;\Delta_n) & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_0;\Delta_L) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{\mathbf{M}}^{T}_{k,i}(\Delta_0;\Delta_n) & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_n;\Delta_n) & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_n;\Delta_L) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{M}}^{T}_{k,i}(\Delta_0;\Delta_L) & \cdots & \bar{\mathbf{M}}^{T}_{k,i}(\Delta_n;\Delta_L) & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_L;\Delta_L) \end{bmatrix} . \tag{3.20}$$

Dessa forma, utilizando o lema de inversão de matrizes e o fato que $\mathbf{R}^{diag,-1}_{k,i}\mathbf{H}^{diag,T}_{k,i} = \mathbf{I}_{(L+1)M\times(L+1)M}$, quando a inversa existir, o ganho do filtro pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}_{k,i} = \mathbf{C}^{xy}_{k,i}\mathbf{C}^{yy,-1}_{k,i} = \mathbf{M}^{xy}_{k,i}\mathbf{H}^{diag,T}_{k,i}(\mathbf{H}^{diag}_{k,i}\mathbf{M}^{yy}_{k,i}\mathbf{H}^{diag,T}_{k,i} + \mathbf{R}^{diag}_{k,i})^{-1} = \\ &= \mathbf{M}^{xy}_{k,i}\mathbf{H}^{diag,T}_{k,i} \cdot (\mathbf{R}^{diag,-1}_{k,i} - \mathbf{R}^{diag,-1}_{k,i}\mathbf{H}^{diag}_{k,i}[\mathbf{H}^{diag,T}_{k,i}\mathbf{R}^{diag,-1}_{k,i}\mathbf{H}^{diag}_{k,i} + \mathbf{M}^{yy,-1}_{k,i}]^{-1}\mathbf{H}^{diag,T}_{k,i}\mathbf{R}^{diag,-1}_{k,i}) \ , \\ &\mathbf{K}_{k,i} = \mathbf{M}^{xy}_{k,i} - \mathbf{M}^{xy}_{k,i}\mathbf{H}^{diag}_{k,i}[\mathbf{R}^{diag}_{k,i} + \mathbf{M}^{yy,-1}_{k,i}]^{-1} \end{aligned} \tag{3.21}$$

e a atualização da matriz de covariância do erro de estimação pode ser feita através de

$$\mathbf{P}_{k|k,i} = \mathbf{P}_{k|k-1,i} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{R}^{diag}_{k,i}\mathbf{M}^{xy,T}_{k,i} \ . \tag{3.22}$$

Essa abordagem é a mesma utilizada para derivação do filtro de Kalman na sua forma da informação (*information form*); entretanto, algumas simplificações usualmente utilizadas nesta derivação não podem ser aplicadas porque o ganho, aqui, não é o ganho ótimo.

Para que $\mathbf{M}_{k,i}^{yy}$ seja positiva definida, o que garantiria a existência da sua inversa, basta que o ruído de modelo seja diferente de zero e não haja componentes redundantes no vetor de estado. Se isso for verdade, como $\mathbf{R}_{k,i}^{diag}$ é positiva semi-definida, pode-se provar que $\mathbf{R}_{k,i}^{diag} + \mathbf{M}_{k,i}^{yy,-1}$ é positiva definida, sendo, portanto, inversível também. Deve-se observar que a igualdade em 3.21 só é verdadeira quando $\mathbf{R}_{k,i}^{diag}$ for inversível devido ao lema de inversão das matrizes. Se este não for o caso, os valores expressos nas equações 3.21 e 3.22 ainda podem ser utilizados como uma aproximação, ao invés de utilizar a pseudo-inversa no cálculo do ganho para uso em 3.15.

Finalmente, falta apenas o cálculo da matriz $\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m)$. Este pode ser feito conforme exposto em Chagas e Waldmann (2010):

$$\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m) = \begin{cases} \begin{aligned} &\Bigg[\prod_{j=0}^{m-n-1} \mathbf{F}_{k-n-1-j}\Big(\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k-n-1-j,i}\cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k-n-1-j,\Delta_0,i}^{f,T} & \cdots & \mathbf{H}_{k-n-1-j,\Delta_L,i}^{f,T} \end{bmatrix}^T\Big)\Bigg] \cdot \mathbf{P}_{k-m|k-m-1,i} \end{aligned} & , \; m > n \,, \\ \bar{\mathbf{M}}_{k,i}^T(m;n) & , \; m < n \,, \\ \mathbf{P}_{k-n|k-n-1,i} & , \; m = n \,, \end{cases} \tag{3.23}$$

para $m,n < k$ e $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. A prova, por questões de completude, se encontra no apêndice D.

Observe que se apenas uma medida com atraso Δ_n chegar ao nó i no instante k, a atualização do filtro é feita através de

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{k,i} = \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_n)\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_n,i}\left(\mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\mathbf{P}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_n,i}+\mathbf{R}^{f}_{k,\Delta_n,i}\right)^{-1} , \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k,i} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i}+\mathbf{K}_{k,i}\left(\mathbf{y}^{f,EXT}_{k,\Delta_n,i}-\mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i}\right) , \\ \mathbf{P}_{k|k,i} = \mathbf{P}_{k|k-1,i}-\mathbf{K}_{k,i}\mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\bar{\mathbf{M}}^{T}_{k,i}(0;\Delta_n) , \end{cases} \tag{3.24}$$

onde se verifica que é um algoritmo exatamente igual ao proposto por Larsen *et al.* (1998), mas que agora pode acomodar o recebimento de múltiplas medidas com múltiplos atrasos, o que não era possível no método original (TASOULIS; ADAMS; HAND, 2010).

3.2.2 Removendo o viés do algoritmo

Com relação ao método obtido na seção anterior, observou-se que o algoritmo possui instabilidade numérica e provê baixa acurácia à medida que cresce o atraso a ser incorporado. Analisando o algoritmo, o fator predominante para esse comportamento é a aproximação em 3.12. Essa aproximação faz com que a estimativa seja enviesada. Para verificar isso, considere que nenhuma medida atrasada foi recebida pelo i-ésimo nó até o instante $k-1$. Dessa forma, o filtro de Kalman assegura que $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = E\{\mathbf{x}_k|\Omega_{k-1}\}$. Então, suponha que no instante k, para o mesmo nó, várias medidas atrasadas são recebidas e processadas para fornecer o vetor $\mathbf{y}^{u,em}_{k,i}$. Se a fusão segundo 3.15 for executada, obtém-se, utilizando as propriedades do operador $E\{.\}$ e a lei iterativa das esperanças (PAPOULIS, 1991):

$$
\begin{aligned}
E\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k,i}\} &= E\left\{E\{\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k-1}\}\right\} + \mathbf{C}^{xy}_{k,i}\mathbf{C}^{yy,-1}_{k,i}\left(E\left\{\mathbf{y}^{u,em}_{k,i}\right\} - E\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_0,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_1,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_L,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \end{bmatrix} \right\} \right) = \\
&= E\{\mathbf{x}_k\} + \mathbf{C}^{xy}_{k,i}\mathbf{C}^{yy,-1}_{k,i}\left(E\left\{\mathbf{y}^{u,em}_{k,i}\right\} - E\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_0,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_1,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_L,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \end{bmatrix} \right\} \right) .
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Na sequência, devido à aproximação em 3.12, segue que

$$
E\left\{\mathbf{y}^{u,em}_{k,i}\right\} - E\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_0,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_1,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_L,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \end{bmatrix} \right\} = \boldsymbol{\delta}_{k,i} \neq \mathbf{0}_{M\cdot L\times 1} . \tag{3.26}
$$

Daí, substituindo 3.26 em 3.25, observa-se que

$$
E\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k,i}\} = E\{\mathbf{x}_k\} + \mathbf{C}^{xy}_{k,i}\mathbf{C}^{yy,-1}_{k,i}\boldsymbol{\delta}_{k,i} \tag{3.27}
$$

e, como $E\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k,i}\} \neq E\{\mathbf{x}_k\}$, conclui-se que o estimador é enviesado.

Quanto maior for o atraso, mais incorreta ficará a aproximação em 3.12, ou, em outras palavras, maior deverá ser o valor de $\boldsymbol{\delta}_{k,i}$. Isso indica porque o método desenvolvido a partir das aproximações utilizadas para se obter um algoritmo análogo ao desenvolvido por Larsen *et* *al.* (1998) apresenta instabilidade em alguns casos com atrasos grandes.

Prosseguindo, será proposto aqui calcular a esperança $E\{\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}$ sem aproximações, pois, conforme será visto, isso fornecerá um algoritmo não enviesado que possuirá performance significativamente maior. Entretanto, o cálculo da matriz $\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})$ será mantido conforme a aproximação em 3.11, pois a computação do valor exato incorrerá em uma carga computacional muito grande. Dessa forma, o resultado será um estimador não enviesado com covariância do erro de estimação maior do que o estimador LMMSE em 3.3.

Conforme pode ser visto no apêndice E, pode-se escrever

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i} = \mathbf{F}^*_{\Delta_n}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \mathbf{u}^*_{\Delta_n} \ , \tag{3.28}$$

onde

$$\mathbf{F}^*_{\Delta_n} \triangleq \begin{cases} \prod_{l=0}^{\Delta_n-1} \mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}, & \Delta_n \neq 0 \ , \\ \mathbf{I}_{M\times M}, & \Delta_n = 0 \ , \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\mathbf{u}^*_{\Delta_n} \triangleq \begin{cases} \sum_{j=1}^{\Delta_n} \left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j} \mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)} \right] \mathbf{B}_{k-j}\mathbf{u}_{k-j} \right), & \Delta_n \neq 0 \ , \\ \mathbf{0}_{M\times 1}, & \Delta_n = 0 \ . \end{cases} \tag{3.30}$$

Observa-se que, se a inversa da matriz de dinâmica do modelo não existir, pode-se utilizar a pseudo-inversa como uma aproximação. Matrizes de dinâmica advindas da discretização temporal de modelos contínuos no tempo, no entanto, sempre são inversíveis conforme será discutido na seção 3.4 (VANVALKENBURG, 2012). Prosseguindo, utilizando 3.5, obtém-se

$$E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} = \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i} = \mathbf{F}^*_{\Delta_n}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \mathbf{u}^*_{\Delta_n} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i} \ . \tag{3.31}$$

Dessa forma, substituindo 3.31 em 3.4, segue que

$$E\{\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k,\Delta_0,i}^{f} \\ \mathbf{H}_{k,\Delta_1,i}^{f} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{k,\Delta_L,i}^{f} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k,\Delta_0,i}^{f}(\mathbf{F}_{\Delta_0}^{*}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \mathbf{u}_{\Delta_0}^{*} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_0|k-\Delta_0-1,i}) \\ \mathbf{H}_{k,\Delta_1,i}^{f}(\mathbf{F}_{\Delta_1}^{*}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \mathbf{u}_{\Delta_1}^{*} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_1|k-\Delta_1-1,i}) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{k,\Delta_L,i}^{f}(\mathbf{F}_{\Delta_L}^{*}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \mathbf{u}_{\Delta_L}^{*} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_L|k-\Delta_L-1,i}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{k,i}} . \tag{3.32}$$

Com isso, uma nova aproximação da estimativa LMMSE pode ser calculada através de

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k,i} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{C}_{k,i}^{xy}\mathbf{C}_{k,i}^{yy,-1} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k,\Delta_0,i}^{f,EXT} \\ \mathbf{y}_{k,\Delta_1,i}^{f,EXT} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k,\Delta_L,i}^{f,EXT} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_{k,i}^{em}} - \mathbf{T}_{k,i} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k,\Delta_0,i}^{f} \\ \mathbf{H}_{k,\Delta_1,i}^{f} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{k,\Delta_L,i}^{f} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{k,i}^{em}} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \right) , \tag{3.33}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k,i} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{C}_{k,i}^{xy}\mathbf{C}_{k,i}^{yy,-1} \left(\mathbf{y}_{k,i}^{em} - \mathbf{H}_{k,i}^{em}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \right) .$$

Observe que, utilizando 3.1 e 3.28, pode-se concluir que

$$\mathbf{y}_{k,i}^{em} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k,\Delta_0,i}^{f,EXT} \\ \mathbf{y}_{k,\Delta_1,i}^{f,EXT} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k,\Delta_L,i}^{f,EXT} \end{bmatrix} - \mathbf{T}_{k,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k,\Delta_0,i}^{f}(\mathbf{x}_{k-\Delta_0} + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_0|k-1,i}) \\ \mathbf{H}_{k,\Delta_1,i}^{f}(\mathbf{x}_{k-\Delta_1} + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_1|k-1,i}) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{k,\Delta_L,i}^{f}(\mathbf{x}_{k-\Delta_L} + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_L|k-1,i}) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{k,\Delta_0,i}^{f} \\ \mathbf{v}_{k,\Delta_1,i}^{f} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{k,\Delta_L,i}^{f} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_{k,i}^{em}} . \tag{3.34}$$

Claramente se verifica que $E\{\mathbf{y}_{k,i}^{em}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \mathbf{H}_{k,i}^{em}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i}$, o que mostra que o estimador é não enviesado (ANDERSON; MOORE, 1979). Além disso, observe que

$$\mathbf{x}_{k-\Delta_n} + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i} = \mathbf{x}_k + \mathbf{e}_k \ , \tag{3.35}$$

onde $\mathbf{e}_k$ é uma variável aleatória que possui média zero. A transição do estado em $k-\Delta_n$ para o estado em k é estimada por $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i}$ utilizando todas as medidas disponíveis até o instante $k-1$ e o erro entre a estimativa e o valor real é a fonte para geração de $\mathbf{e}_k$. Assim, pode-se aproximar

$$\mathbf{y}_{k,i}^{em} \approx \mathbf{H}_{k,i}^{em}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{k,i}^{em} \ , \tag{3.36}$$

se $\mathbf{e}_k$ for desprezado, o que mostra como este método tenta extrapolar a medida, gerando uma pseudomedida do estado atual. Devido a isso, as matrizes $\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m)$ ainda podem ser calculadas de acordo com 3.23, gerando uma aproximação da matriz $\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m)$ segundo 3.11. Adicionalmente, a atualização da matriz de covariância do filtro de Kalman é feita igualmente através de 3.16, com $\mathbf{K}_{k,i} := \mathbf{C}_{k,i}^{xy}\mathbf{C}_{k,i}^{yy,-1}$, onde, de maneira análoga, se a inversa de $\mathbf{C}_{k,i}^{yy}$ não existir, pode-se utilizar a pseudo-inversa (ZHANG; LI; ZHU, 2005) ou o algoritmo proposto em 3.21.

As diversas aproximações mostraram instabilidade numérica no cálculo da matriz de covariância atualizada do erro de estimação $\mathbf{P}_{k|k,i}$ caso o atraso a ser incorporado for muito grande. Tal instabilidade gerava matrizes de covariância não positivas que levavam o filtro à divergência. Dessa forma, é interessante utilizar alguma forma estabilizada para o cálculo da matriz de covariância nesses casos. A conhecida fórmula de Joseph (MAYBECK, 1979) não pode, a princípio, ser utilizada nesse problema, uma vez que $\mathbf{y}_{k,i}^{em} \neq \mathbf{H}_{k,i}^{em}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{k,i}^{em}$. Entretanto, considerando a aproximação em 3.36, será utilizada uma expressão aproximada inspirada na fórmula de Joseph

$$\mathbf{P}_{k|k,i} \approx (\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{H}^{em}_{k,i})\mathbf{P}_{k|k-1,i}(\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{H}^{em}_{k,i})^T + \mathbf{K}_{k,i}E\{\mathbf{v}^{em}_{k,i}\mathbf{v}^{em,T}_{k,i}\}\mathbf{K}^T_{k,i}\ , \tag{3.37}$$

onde $E\{\mathbf{v}^{em}_{k,i}\mathbf{v}^{em,T}_{k,i}\} = diag\begin{pmatrix} \mathbf{R}^f_{k,\Delta_0,i} & \mathbf{R}^f_{k,\Delta_1,i} & \cdots & \mathbf{R}^f_{k,\Delta_L,i} \end{pmatrix}$, aproximando o cálculo da matriz de covariância atualizada. Note que, em geral, o uso dessa equação fornecerá uma aproximação com erro maior para a matriz de covariância do erro de estimação atualizado $\mathbf{P}_{k|k,i}$ quando comparada com a atualização gerada por 3.22, pois o cálculo em 3.37 é aproximado. Entretanto, o seu uso se faz necessário quando o atraso de medidas for alto e o uso da forma em 3.22 incorrer em erros numéricos relevantes que causem instabilidade na computação da covariância e divergência do algoritmo. Dessa forma, convém utilizar a atualização aproximada de Joseph em 3.37 somente se o cálculo resultante da matriz de covariância pelo método em 3.22 fornecer uma matriz não positiva definida. Contudo, dependendo da implementação, o teste para verificar tal ocorrência pode incorrer em uma carga computacional proibitiva.

O problema dessa nova abordagem quando comparada à obtida pelas aproximações utilizadas por Larsen *et al.* (1998) é a necessidade de emprego das inversas das matrizes de modelo (vide o cálculo do vetor $\mathbf{T}_{k,i}$ em 3.32). Para evitar um grande aumento da carga computacional, as inversas podem ser calculadas a cada instante de amostragem e armazenadas para uso futuro. Vale mencionar que se a inversa não existir, pode-se substituí-la pela pseudo-inversa, mas, neste caso, não se pode afirmar que o algoritmo resultante não terá viés e é esperado que a acurácia seja degradada. Conforme mencionado anteriormente, matrizes de dinâmica advindas da discretização temporal de modelos contínuos no tempo, no entanto, sempre são inversíveis (VANVALKENBURG, 2012).

Dessa forma, o algoritmo para o i-ésimo nó no instante k pode ser finalmente descrito conforme a tabela 3.1.

3.2.3 Cálculo Recursivo das Matrizes $\mathbf{M}_{k,i}^{xy}$ e $\mathbf{M}_{k,i}^{yy}$

Se medidas atrasadas são recebidas frequentemente, pode-se aliviar a grande carga computacional no cálculo das matrizes $\mathbf{M}_{k,i}^{xy}$ e $\mathbf{M}_{k,i}^{yy}$. Utilizando 3.23, conclui-se que

$$\bar{\mathbf{M}}_{k+1,i}(n+1;m+1) = \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m) \ , \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathbf{M}}_{k+1,i}(0;m) = \\
&= \mathbf{F}_k \left(\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k,i} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k,\Delta_0,i}^{f,T} & \cdots & \mathbf{H}_{k,\Delta_L,i}^{f,T} \end{bmatrix}^T \right) \bar{\mathbf{M}}_{k+1,i}(1;m) = \\
&= \mathbf{F}_k \left(\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k,i} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k,\Delta_0,i}^{f,T} & \cdots & \mathbf{H}_{k,\Delta_L,i}^{f,T} \end{bmatrix}^T \right) \bar{\mathbf{M}}_{k,i}(0;m-1), \ \ m > 0 \ ,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

onde se verifica que se no instante k as matrizes $\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m)$, $0 \leq n \leq max-1$, $0 \leq m \leq max-1$, $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ forem armazenadas, então, no instante $k+1$, basta utilizar a relação mostrada em 3.38 e calcular as matrizes $\bar{\mathbf{M}}_{k+1,i}(n;m)$ com $n = 0$ ou $m = 0$ utilizando 3.39. Assim, as matrizes $\mathbf{M}_{k,i}^{xy}$ e $\mathbf{M}_{k,i}^{yy}$ podem ser montadas facilmente a cada instante k de amostragem utilizando a informação calculada no instante anterior $k-1$. Entretanto, se medidas atrasadas são recebidas de forma esporádica, a realização desta computação a todo o instante poderá gerar uma carga computacional muito maior do que computar as matrizes apenas quando as medidas forem obtidas. Logo, a melhor abordagem a ser utilizada dependerá do tipo de problema a resolver.

TABELA 3.1 – Descrição do algoritmo para o i-ésimo nó do método Extrapolação de Medidas (EM) para a fusão no instante k.

1	Predição do filtro de Kalman	$\hat{\mathbf{x}}_{k\|k-1,i} = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1\|k-1,i} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}$ $\mathbf{P}_{k\|k-1,i} = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1\|k-1,i}\mathbf{F}^T_{k-1} + \mathbf{Q}_{k-1}$
2	Recebimento dos vetores transformados e suas respectivas estatísticas (eqs. 2.13 e 2.14)	$\mathbf{y}^s_{k-\Delta_n,j} = \mathbf{H}^T_{k-\Delta_n,j}\mathbf{R}^{-1}_{k-\Delta_n,j}\mathbf{y}_{k-\Delta_n,j}$ $\mathbf{R}^s_{k-\Delta_n,j} = \mathbf{H}^f_{k-\Delta_n,j} = \mathbf{H}^T_{k-\Delta_n,j}\mathbf{R}^{-1}_{k-\Delta_n,j}\mathbf{H}_{k-\Delta_n,j}$ Obs.: Informações recebidas do j-ésimo nó atrasadas de Δ_n instantes de amostragem.
3	Separar os vetores por atraso, criando os subconjuntos $\boldsymbol{\nu}^i_{k,\Delta_n}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$	Conforme seção 2.6.1
4	Fusão dos vetores em cada subconjunto $\boldsymbol{\nu}^i_{k,\Delta_n}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$ (eq. 2.16)	$\mathbf{y}^f_{k,\Delta_n,i} = \sum_{j\in\nu^i_{k,\Delta_n}} \mathbf{y}^s_{k-\Delta_n,j}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$ $\mathbf{R}^f_{k,\Delta_n,i} = \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i} = \sum_{j\in\nu^i_{k,\Delta_n}} \mathbf{R}^s_{k-\Delta_n,j}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$
5	Extrapolar cada vetor fundido (eq. 3.1)	$\mathbf{y}^{f,EXT}_{k,\Delta_n,i} = \mathbf{y}^f_{k,\Delta_n,i} + \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\hat{\mathbf{x}}_{k\|k-1,i} - \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n\|k-\Delta_n-1,i}$ $n \in [0,1,\cdots,L]$
6	Empilhar os vetores extrapolados para criar o vetor $\mathbf{y}^{u,em}_{k,i}$ (eq. 3.2)	$\mathbf{y}^{u,em}_{k,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{f,EXT,T}_{k,\Delta_0,i} & \mathbf{y}^{f,EXT,T}_{k,\Delta_1,i} & \cdots & \mathbf{y}^{f,EXT,T}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix}^T$
7	Computar as matrizes $\mathbf{M}^{xy}_{k,i}$ e $\mathbf{M}^{yy}_{k,i}$	Vide eqs. 3.19, 3.20 e 3.23
8	Computar as matrizes $\mathbf{H}^{diag}_{k,i}$ e $\mathbf{R}^{diag}_{k,i}$	Vide eqs. 3.18
9	Computar o ganho $\mathbf{K}_{k,i}$ (eq. 3.21)	$\mathbf{K}_{k,i} = \mathbf{M}^{xy}_{k,i} - \mathbf{M}^{xy}_{k,i}\mathbf{H}^{diag}_{k,i}[\mathbf{R}^{diag}_{k,i} + \mathbf{M}^{yy,-1}_{k,i}]^{-1}$
10	Computar as matrizes $\mathbf{F}^*_{\Delta_n}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$ (eq. 3.29)	$\mathbf{F}^*_{\Delta_n} = \begin{cases} \prod_{l=0}^{\Delta_n-1} \mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}, & \Delta_n \neq 0 \\ \mathbf{I}_{M\times M}, & \Delta_n = 0 \end{cases}$
11	Computar os vetores $\mathbf{u}^*_{\Delta_n}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$ (eq. 3.30)	$\mathbf{u}^*_{\Delta_n} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\Delta_n} \left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j} \mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)} \right] \mathbf{B}_{k-j}\mathbf{u}_{k-j} \right), & \Delta_n \neq 0 \\ \mathbf{0}_{M\times 1}, & \Delta_n = 0 \end{cases}$
12	Computar o vetor $\mathbf{T}_{k,i}$ (eq. 3.32)	$\mathbf{T}_{k,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^f_{k,\Delta_0,i}(\mathbf{F}^*_{\Delta_0}\hat{\mathbf{x}}_{k\|k-1,i} - \mathbf{u}^*_{\Delta_0} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_0\|k-\Delta_0-1,i}) \\ \mathbf{H}^f_{k,\Delta_1,i}(\mathbf{F}^*_{\Delta_1}\hat{\mathbf{x}}_{k\|k-1,i} - \mathbf{u}^*_{\Delta_1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_1\|k-\Delta_1-1,i}) \\ \vdots \\ \mathbf{H}^f_{k,\Delta_L,i}(\mathbf{F}^*_{\Delta_L}\hat{\mathbf{x}}_{k\|k-1,i} - \mathbf{u}^*_{\Delta_L} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_L\|k-\Delta_L-1,i}) \end{bmatrix}$
13	Computar o vetor $\mathbf{y}^{em}_{k,i}$ (eq. 3.33)	$\mathbf{y}^{em}_{k,i} = \mathbf{y}^{u,em}_{k,i} - \mathbf{T}_{k,i}$
14	Computar a matriz $\mathbf{H}^{em}_{k,i}$ (eq. 3.33)	$\mathbf{H}^{em}_{k,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_0,i} & \mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_1,i} & \cdots & \mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix}^T$
15	Atualização do filtro de Kalman (eqs. 3.22 e 3.33)	$\hat{\mathbf{x}}_{k\|k,i} = \hat{\mathbf{x}}_{k\|k-1,i} + \mathbf{K}_{k,i}\left(\mathbf{y}^{em}_{k,i} - \mathbf{H}^{em}_{k,i}\hat{\mathbf{x}}_{k\|k-1,i}\right)$ $\mathbf{P}_{k\|k,i} = \mathbf{P}_{k\|k-1,i} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{R}^{diag}_{k,i}\mathbf{M}^{xy,T}_{k,i}$
16	(OPCIONAL) Verificar se a matriz de covariância atualizada gerada é positiva definida. Se não for, recomputá-la com a fórmula estabilizada de Joseph aproximada	Vide eq. 3.37

3.3 Transporte de Medidas (TM)

Aqui será proposto um método que, no melhor conhecimento do autor, ainda não foi explorado para a fusão de vetores de medidas atrasadas no filtro de Kalman distribuído. Este método é baseado na metodologia proposta por Bar-Shalom *et al.* (2002) e no filtro de Kalman com estado atrasado (*delayed state Kalman filter*), mostrado inicialmente em Brown e Hartman (1968). Esta técnica consiste em incorporar ao filtro de Kalman um vetor de medidas que é composto simultaneamente por uma medida do estado k e do estado $k-1$. Existe uma infinidade de trabalhos na literatura que aplicaram esse filtro para estimar estados em diversos cenários, entre eles pode-se citar Dell'Aquila *et al.* (1996), Romero (2002), Romero e Hemerly (2004), Bond (2007). Aqui, este método será expandido para que possa ser aplicado ao problema distribuído. Para isso, ele deve ser modificado para que seja possível fundir múltiplas medidas atrasadas possuindo atrasos distintos que podem ser maiores que um instante de amostragem. Isso, no melhor conhecimento do autor, não foi feito ainda na literatura disponível e as modificações são expressas a seguir.

Primeiramente, observe que 2.3 pode ser reescrito como (BROWN; HWANG, 1997)

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{B}_k\mathbf{u}_k - \mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{G}_k\mathbf{w}_k \ , \tag{3.40}$$

onde é suposto que a inversa da matriz $\mathbf{F}_k$ existe. Caso isso não ocorra, pode-se utilizar a pseudo-inversa. Entretanto, pode-se verificar que a discretização de um sistema contínuo irá sempre fornecer matriz dinâmica $\mathbf{F}_k$ inversível, conforme poderá ser observado na seção 3.4 (VANVALKENBURG, 2012). Estendendo o resultado mostrado em Brown e Hwang (1997), pode-se mostrar, por indução, que o estado $\mathbf{x}_{k-n}$ se relaciona com o estado $\mathbf{x}_k$ através de

$$\mathbf{x}_{k-n} = \\ = \left[\prod_{l=0}^{n-1} \mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]\mathbf{x}_k - \sum_{j=1}^{n}\left(\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]\mathbf{B}_{k-j}\mathbf{u}_{k-j}\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\right) . \tag{3.41}$$

Dessa forma, para cada subconjunto $\boldsymbol{\nu}^i_{k,\Delta_n}$ definido na seção 2.6.1, que é formado pelos vetores de medidas atrasadas por Δ_n instantes de amostragem recebidos pelo i-ésimo nó no instante k, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^f_{k,\Delta_n,i} &= \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\mathbf{x}_{k-\Delta_n} + \mathbf{v}^f_{k,\Delta_n,i} = \\
&= \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\mathbf{x}_k + \mathbf{v}^f_{k,\Delta_n,i} - \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\sum_{j=1}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\mathbf{B}_{k-j}\mathbf{u}_{k-j}\right) - \\
&\quad - \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\sum_{j=1}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\right) = \\
&= \mathbf{H}^p_{k,\Delta_n,i}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}^p_{k,\Delta_n,i} + \mathbf{v}^p_{k,\Delta_n,i} \triangleq \mathbf{y}^p_{k,\Delta_n,i} ,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

sendo

$$\mathbf{H}^p_{k,\Delta_n,i} \triangleq \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right] , \tag{3.43}$$

$$\mathbf{u}^p_{k,\Delta_n,i} \triangleq -\mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\sum_{j=1}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\mathbf{B}_{k-j}\mathbf{u}_{k-j}\right) , \tag{3.44}$$

$$\mathbf{v}^p_{k,\Delta_n,i} \triangleq \mathbf{v}^f_{k,\Delta_n,i} - \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\sum_{j=1}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\right) . \tag{3.45}$$

Com isso, empilhando-se os vetores de medidas de cada subconjunto $\boldsymbol{\nu}^i_{k,\Delta_n}$, $n \in [0, 1, \cdots, L]$, obtém-se o vetor de medição a ser fundido no instante k pelo i-ésimo nó:

$$\mathbf{y}^{tm}_{k,i} \triangleq \mathbf{H}^{tm}_{k,i}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}^{tm}_{k,i} , \tag{3.46}$$

onde

$$\mathbf{y}_{k,i}^{tm} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k,\Delta_0,i}^{p,T} & \mathbf{y}_{k,\Delta_1,i}^{p,T} & \cdots & \mathbf{y}_{k,\Delta_L,i}^{p,T} \end{bmatrix}^T - \mathbf{u}_{k,i}^{tm} , \tag{3.47}$$

$$\mathbf{u}_{k,i}^{tm} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k,\Delta_0,i}^{p,T} & \mathbf{u}_{k,\Delta_1,i}^{p,T} & \cdots & \mathbf{u}_{k,\Delta_L,i}^{p,T} \end{bmatrix}^T , \tag{3.48}$$

$$\mathbf{H}_{k,i}^{tm} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k,\Delta_0,i}^{p,T} & \mathbf{H}_{k,\Delta_1,i}^{p,T} & \cdots & \mathbf{H}_{k,\Delta_L,i}^{p,T} \end{bmatrix}^T , \tag{3.49}$$

$$\mathbf{v}_{k,i}^{tm} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{k,\Delta_0,i}^{p,T} & \mathbf{v}_{k,\Delta_1,i}^{p,T} & \cdots & \mathbf{v}_{k,\Delta_L,i}^{p,T} \end{bmatrix}^T . \tag{3.50}$$

Então, a atualização do filtro é feita utilizando a estimativa LMMSE, que é definida neste caso como (BAR-SHALOM; LI; KIRUBARAJAN, 2001):

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k|k,i} = E\{\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}, \mathbf{y}_{k,i}^{tm}\} = E\{\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} + \mathbf{C}_{k,i}^{xy}\mathbf{C}_{k,i}^{yy,-1}(\mathbf{y}_{k,i}^{tm} - E\{\mathbf{y}_{k,i}^{tm}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}) , \\ \mathbf{C}_{k,i}^{xy} = E\{(\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\})(\mathbf{y}_{k,i}^{tm} - E\{\mathbf{y}_{k,i}^{tm}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\})^T|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} , \\ \mathbf{C}_{k,i}^{yy} = E\{(\mathbf{y}_{k,i}^{tm} - E\{\mathbf{y}_{k,i}^{tm}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\})(\mathbf{y}_{k,i}^{tm} - E\{\mathbf{y}_{k,i}^{tm}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\})^T|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} , \end{cases} \tag{3.51}$$

Percebe-se que, apenas reescrevendo a matriz de medição e o ruído do sensor, se pode **transportar** uma medida auferida em um instante anterior para o instante atual. Entretanto, resta descrever as estatísticas do ruído de medição para que esta possa ser incorporada no filtro de Kalman. Primeiramente, devido às considerações com relação aos ruídos nos sensores e o ruído de modelagem, observa-se que $E\{\mathbf{v}_{k,i}^{tm}\} = \mathbf{0}_{(L+1)M\times 1}$. Dessa forma, considerando as suposições de independência entre os ruídos, expressas na seção 2.2, a matriz de covariância do ruído de medição pode ser escrita, verificando que, para $n \geq 1$, $m \geq 1$ e $n < m$,

$$E\{\mathbf{v}^{p}_{k,n,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,m,i}\} = \mathbf{H}^{f}_{k,n,i}\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]\mathbf{Q}_{k-j}\left[\prod_{l=0}^{m-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(m-l)}\right]^{T}\right)\mathbf{H}^{T,f}_{k,m,i}\ . \tag{3.52}$$

Na sequência, para $n \geq 1$, $m \geq 1$ e $n = m$ se obtém

$$E\{\mathbf{v}^{p}_{k,n,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,m,i}\} = \mathbf{R}^{f}_{k,n,i} + \mathbf{H}^{f}_{k,n,i}\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]\mathbf{Q}_{k-j}\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]^{T}\right)\mathbf{H}^{T,f}_{k,n,i}\ . \tag{3.53}$$

Para $n \geq 1$, $m \geq 1$ e $n > m$, pode-se facilmente notar que

$$E\{\mathbf{v}^{p}_{k,n,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,m,i}\} = E\{\mathbf{v}^{p}_{k,m,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,n,i}\}^{T} \tag{3.54}$$

e, então, pode-se utilizar 3.52. As equações 3.52, 3.53 e 3.54 estão provadas no apêndice F.

Finalmente, para $n = 0$ ou $m = 0$:

$$E\{\mathbf{v}^{p}_{k,n,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,m,i}\} = \mathbf{R}^{f}_{k,0,i}\cdot\delta(n)\cdot\delta(m)\ , \tag{3.55}$$

onde $\delta(.)$ é o delta de Kronecker. Esse resultado é válido porque se n ou m forem 0, um dos vetores de ruídos está relacionado com uma medida do instante k atual que não necessitou ser transportada, ou seja, não foi necessária a aplicação de 3.42. Dessa forma, a medida $\mathbf{y}^{f}_{k,0,i} = \mathbf{H}^{f}_{k,0,i}\mathbf{x}_{k} + \mathbf{v}^{f}_{k,0,i}$ não contém nenhum ruído de modelo, apenas o ruído de medição original que, por hipótese, é descorrelacionado de qualquer outro ruído existente no problema. Finalmente, utilizando 3.52 a 3.55, pode-se montar a matriz $\mathbf{R}^{tm}_{k,i} = E\{\mathbf{v}^{tm}_{k,i}\mathbf{v}^{tm,T}_{k,i}\}$:

$$\mathbf{R}^{tm}_{k,i} = E\{\mathbf{v}^{tm}_{k,i}\mathbf{v}^{tm,T}_{k,i}\} = \begin{bmatrix} E\{\mathbf{v}^{p}_{k,\Delta_0,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_0,i}\} & \cdots & E\{\mathbf{v}^{p}_{k,\Delta_0,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_L,i}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{\mathbf{v}^{p}_{k,\Delta_L,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_0,i}\} & \cdots & E\{\mathbf{v}^{p}_{k,\Delta_L,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_L,i}\} \end{bmatrix} . \tag{3.56}$$

Conforme mencionado, vetor $\mathbf{y}^{tm}_{k,i}$ em 3.46 será utilizado para atualizar o filtro de Kalman local do i-ésimo nó no instante k. Entretanto, deve-se utilizar outro algoritmo para a atualização que não o usual, pois agora o ruído de medição $\mathbf{v}^{tm}_{k,i}$ possuirá correlação com o ruído de modelagem (BROWN; HWANG, 1997). Neste caso, pode-se mostrar que (ANDERSON; MOORE, 1979)

$$\mathbf{C}^{xy}_{k,i} = \mathbf{P}_{k|k-1,i}\mathbf{H}^{tm,T}_{k,i} + E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i})\mathbf{v}^{tm,T}_{k,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} , \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{yy}_{k,i} = {} & \mathbf{H}^{tm}_{k,i}\mathbf{P}_{k|k-1,i}\mathbf{H}^{tm,T}_{k,i} + \mathbf{R}^{tm}_{k,i} + \mathbf{H}^{tm}_{k,i}E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i})\mathbf{v}^{tm,T}_{k,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} + \\ & + E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i})\mathbf{v}^{tm,T}_{k,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\}^T\mathbf{H}^{tm,T}_{k,i} . \end{aligned} \tag{3.58}$$

Para o cálculo da atualização da covariância, lembrando que $\mathbf{K}_{k,i} = \mathbf{C}^{xy}_{k,i}\mathbf{C}^{yy,-1}_{k,i}$, obtém-se

$$\mathbf{P}_{k|k,i} = \mathbf{P}_{k|k-1,i} + \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{C}^{yy}_{k,i}\mathbf{K}^T_{k,i} - \mathbf{C}^{xy}_{k,i}\mathbf{K}^T_{k,i} - (\mathbf{C}^{xy}_{k,i}\mathbf{K}^T_{k,i})^T = \mathbf{P}_{k|k-1,i} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{C}^{yy}_{k,i}\mathbf{K}^T_{k,i} . \tag{3.59}$$

Então, para o cálculo da estimativa LMMSE conforme 3.51, ainda resta calcular

$$\mathbf{S}_{k,i} \triangleq E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i})\mathbf{v}^{tm,T}_{k,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} . \tag{3.60}$$

Para isso, note que

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{k,i} &= E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i})\mathbf{v}_{k,i}^{tm,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} = \\ &= E\{(\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k\} + E\{\mathbf{x}_k\} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i})\mathbf{v}_{k,i}^{tm,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} = \\ &= E\{(\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k\})\mathbf{v}_{k,i}^{tm,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} - E\{(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - E\{\mathbf{x}_k\})\mathbf{v}_{k,i}^{tm,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}\ .\end{aligned} \tag{3.61}$$

Observe que $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i}$ é uma variável aleatória que é função apenas de todos os vetores de medição fundidos até o instante $k-1$ e da variável aleatória $\mathbf{x}_0$. Além disso, $\mathbf{x}_0$, por suposição, é independente de todos os ruídos dos sensores e de modelagem. Como as medidas atrasadas recebidas pelo i-ésimo nó no instante k não podem ter sido fundidas pelo mesmo nó em instantes anteriores, logo, condicionado a $\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}$, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i}$ e $\mathbf{v}_{k,i}^{tm}$ são independentes. Assim,

$$\begin{aligned}E\{(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - E\{\mathbf{x}_k\})\mathbf{v}_{k,i}^{tm,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} &= E\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i}\mathbf{v}_{k,i}^{tm,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} - E\{E\{\mathbf{x}_k\}\mathbf{v}_{k,i}^{tm,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} = \\ &= E\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}E\{\mathbf{v}_{k,i}^{tm,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} - E\{\mathbf{x}_k\}E\{\mathbf{v}_{k,i}^{tm,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}\ .\end{aligned} \tag{3.62}$$

Então, devido às considerações com relação ao ruído de modelo e ao ruído de medição, obtém-se

$$E\{(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - E\{\mathbf{x}_k\})\mathbf{v}_{k,i}^{tm,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} = \mathbf{0}_{M\times(L+1)M}\ . \tag{3.63}$$

Adicionalmente, pode-se mostrar por indução que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k = &\left[\prod_{t=1}^{n}\mathbf{F}_{k-t,i}\right]\mathbf{x}_{k-n} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \\ &+ \sum_{j=2}^{n}\left(\left[\prod_{t=1}^{j-1}\mathbf{F}_{k-t}\right]\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\right) + \sum_{j=2}^{n}\left(\left[\prod_{t=1}^{j-1}\mathbf{F}_{k-t}\right]\mathbf{B}_{k-j}\mathbf{u}_{k-j}\right)\ ,\end{aligned} \tag{3.64}$$

o que, fazendo $n = k$, fornece

$$\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k\} = \left[\prod_{t=1}^{k} \mathbf{F}_{k-t}\right](\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0) + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} + \sum_{j=2}^{k}\left(\left[\prod_{t=1}^{j-1} \mathbf{F}_{k-t}\right]\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\right) . \quad (3.65)$$

O ruído de modelo $\mathbf{G}_k\mathbf{w}_k$, $n \in \mathbb{N}$, foi assumido como uma sequência branca. Dessa forma, $E\{\mathbf{G}_n\mathbf{w}_n\mathbf{w}_m^T\mathbf{G}_m^T\} = \mathbf{Q}_n \cdot \delta(n-m)$. Utilizando esse resultado em conjunto com a suposição que $\mathbf{x}_0$ é independente com respeito a todas as sequências de ruídos de modelo e de medição, pode-se verificar, conforme mostrado no apêndice G, que

$$E\{(\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k\})\mathbf{v}_{k,\Delta_n,i}^{p,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} =$$
$$= \left\{-\mathbf{Q}_{k-1}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1}\mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}\right]^T - \sum_{j=2}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{t=1}^{j-1}\mathbf{F}_{k-t}\right]\mathbf{Q}_{k-j}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j}\mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}\right]^T\right)\right\}\mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f,T} \quad (3.66)$$

para $n \in [0,1,2,\cdots,L]$ e $\Delta_n \neq 0$. Se $\Delta_0 = 0$, então

$$E\{(\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k\})\mathbf{v}_{k,\Delta_0,i}^{p,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} = \mathbf{0}_{M\times M} . \quad (3.67)$$

Dessa forma, os resultados em 3.66 e 3.67 permitem computar a matriz $\mathbf{S}_{k,i}$:

$$\mathbf{S}_{k,i} = \begin{bmatrix} \left(E\{(\mathbf{x}_{k,i} - E\{\mathbf{x}_{k,i}\})\mathbf{v}_{k,\Delta_0,i}^{p,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}\right)^T \\ \left(E\{(\mathbf{x}_{k,i} - E\{\mathbf{x}_{k,i}\})\mathbf{v}_{k,\Delta_1,i}^{p,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}\right)^T \\ \vdots \\ \left(E\{(\mathbf{x}_{k,i} - E\{\mathbf{x}_{k,i}\})\mathbf{v}_{k,\Delta_L,i}^{p,T}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}\right)^T \end{bmatrix}^T . \quad (3.68)$$

Finalmente, utilizando 3.46, 3.56 e 3.68, pode-se realizar a atualização do filtro de Kalman computando a estimativa LMMSE em 3.51 de acordo com:

$$\mathbf{K}_{k,i} = (\mathbf{P}_{k|k-1,i}\mathbf{H}_{k,i}^{tm,T} + \mathbf{S}_{k,i})(\mathbf{H}_{k,i}^{tm}\mathbf{P}_{k|k-1,i}\mathbf{H}_{k,i}^{tm,T} + \mathbf{R}_{k,i}^{tm} + \mathbf{H}_{k,i}^{tm}\mathbf{S}_{k,i} + \mathbf{S}_{k,i}^{T}\mathbf{H}_{k,i}^{tm,T})^{-1} \ , \tag{3.69}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k,i} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{K}_{k,i}(\mathbf{y}_{k,i}^{tm} - \mathbf{H}_{k,i}^{tm}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i}) \ , \tag{3.70}$$

$$\mathbf{P}_{k|k,i} = \mathbf{P}_{k|k-1,i} - \mathbf{K}_{k,i}(\mathbf{H}_{k,i}^{tm}\mathbf{P}_{k|k-1,i}\mathbf{H}_{k,i}^{tm,T} + \mathbf{R}_{k,i}^{tm} + \mathbf{H}_{k,i}^{tm}\mathbf{S}_{k,i} + \mathbf{S}_{k,i}^{T}\mathbf{H}_{k,i}^{tm,T})\mathbf{K}_{k,i}^{T} \ . \tag{3.71}$$

De maneira análoga ao método de extrapolação de medidas, verificou-se que o cálculo da matriz de covariância atualizada em 3.59 apresentou instabilidade numérica em alguns casos quando o atraso das medidas a serem incorporadas era muito grande. Em algumas situações, a matriz de covariância computada não era positiva, o que fazia o filtro divergir. O desenvolvimento análogo para se obter a fórmula estabilizada de Joseph no filtro de Kalman comum, sem atrasos, fornece para esse caso (ANDERSON; MOORE, 1979)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k,i} = {} & (\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{H}_{k,i}^{tm})\mathbf{P}_{k|k-1,i}(\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{H}_{k,i}^{tm})^{T} + \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{R}_{k,i}^{tm}\mathbf{K}_{k,i}^{T} - \\ & - (\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{H}_{k,i}^{tm})\mathbf{S}_{k}\mathbf{K}_{k,i}^{T} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{S}_{k}^{T}(\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{H}_{k,i}^{tm})^{T} \ . \end{aligned} \tag{3.72}$$

Observe que a soma

$$-(\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{H}_{k,i}^{tm})\mathbf{S}_{k}\mathbf{K}_{k,i}^{T} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{S}_{k}^{T}(\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{H}_{k,i}^{tm})^{T} \tag{3.73}$$

faz com que essa forma não garanta a positividade da matriz de covariância $\mathbf{P}_{k|k,i}$ como na fórmula de Joseph para o caso sem atrasos. Isso ocorre porque o ruído de medição $\mathbf{v}_{k,i}^{tm}$ possui correlação com o estado. Entretanto, para estabilizar o algoritmo, quando a computação da matriz de covariância segundo 3.59 fornecer uma matriz que não seja positiva definida, pode-se utilizar a fórmula de Joseph usual como uma aproximação no cálculo desta matriz:

$$\mathbf{P}_{k|k,i} \approx (\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{H}_{k,i}^{tm})\mathbf{P}_{k|k-1,i}(\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{H}_{k,i}^{tm})^T + \mathbf{K}_{k,i}\mathbf{R}_{k,i}^{tm}\mathbf{K}_{k,i}^T \,. \tag{3.74}$$

Esse procedimento garante uma matriz resultante positiva, mas com um erro em relação ao cálculo exato dado por 3.73.

Finalmente, o algoritmo para o i-ésimo nó no instante k pode ser descrito conforme a tabela 3.2.

3.4 A Inversa da Matriz de Modelo e o Problema de Navegação

Nos dois últimos métodos apresentados, a inversa da matriz de modelo deverá existir. Cabe lembrar que, ao tratar-se de modelos lineares de sistemas dinâmicos contínuos formulados no domínio discreto do tempo, tal requisito não representa obstáculo. No caso de interesse, o problema de estimação de erros em navegação inercial é modelado como um sistema linear contínuo variante no tempo (SALYCHEV, 2004)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \,. \tag{3.75}$$

Este sistema é, então, discretizado com um passo Δ, em que se considera que a matriz $\mathbf{A}(t)$

TABELA 3.2 – Descrição do algoritmo para o i-ésimo nó do método Transporte de Medidas (TM) para a fusão no instante k.

1	Predição do filtro de Kalman	$\hat{\mathbf{x}}_{k\|k-1,i} = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1\|k-1,i} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}$ $\mathbf{P}_{k\|k-1,i} = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1\|k-1,i}\mathbf{F}^T_{k-1} + \mathbf{Q}_{k-1}$
2	Recebimento dos vetores transformados e suas respectivas estatísticas (eqs. 2.13 e 2.14)	$\mathbf{y}^s_{k-\Delta_n,j} = \mathbf{H}^T_{k-\Delta_n,j}\mathbf{R}^{-1}_{k-\Delta_n,j}\mathbf{y}_{k-\Delta_n,j}$ $\mathbf{R}^s_{k-\Delta_n,j} = \mathbf{H}^f_{k-\Delta_n,j} = \mathbf{H}^T_{k-\Delta_n,j}\mathbf{R}^{-1}_{k-\Delta_n,j}\mathbf{H}_{k-\Delta_n,j}$ Obs.: Informações recebidas do j-ésimo nó atrasadas de Δ_n instantes de amostragem.
3	Separar os vetores por atraso, criando os subconjuntos $\boldsymbol{\nu}^i_{k,\Delta_n}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$	Conforme seção 2.6.1
4	Fusão dos vetores em cada subconjunto $\boldsymbol{\nu}^i_{k,\Delta_n}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$ (eq. 2.16)	$\mathbf{y}^f_{k,\Delta_n,i} = \sum_{j\in\nu^i_{k,\Delta_n}} \mathbf{y}^s_{k-\Delta_n,j}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$ $\mathbf{R}^f_{k,\Delta_n,i} = \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i} = \sum_{j\in\nu^i_{k,\Delta_n}} \mathbf{R}^s_{k-\Delta_n,j}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$
5	Computar as matrizes $\mathbf{H}^p_{k,\Delta_n,i}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$ (eq. 3.43)	$\mathbf{H}^p_{k,\Delta_n,i} = \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]$
6	Computar a matriz $\mathbf{H}^{tm}_{k,i}$ (eq. 3.49)	$\mathbf{H}^{tm}_{k,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{p,T}_{k,\Delta_0,i} & \mathbf{H}^{p,T}_{k,\Delta_1,i} & \cdots & \mathbf{H}^{p,T}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix}^T$
6	Computar os vetores $\mathbf{u}^p_{k,\Delta_n,i}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$ (eq. 3.44)	$\mathbf{u}^p_{k,\Delta_n,i} = -\mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\sum_{j=1}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\mathbf{B}_{k-j}\mathbf{u}_{k-j}\right)$
7	Computar o vetor $\mathbf{u}^{tm}_{k,i}$ (eq. 3.48)	$\mathbf{u}^{tm}_{k,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{p,T}_{k,\Delta_0,i} & \mathbf{u}^{p,T}_{k,\Delta_1,i} & \cdots & \mathbf{u}^{p,T}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix}^T$
8	Computar o vetor $\mathbf{y}^{tm}_{k,i}$ (eq. 3.47)	$\mathbf{y}^{tm}_{k,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{p,T}_{k,\Delta_0,i} & \mathbf{y}^{p,T}_{k,\Delta_1,i} & \cdots & \mathbf{y}^{p,T}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix}^T - \mathbf{u}^{tm}_{k,i}$
9	Computar a matriz de covariância do ruído de medição $\mathbf{R}^{tm}_{k,i}$	Vide eqs. 3.52, 3.53, 3.54 e 3.55
10	Computar a matriz $\mathbf{S}_{k,i}$ de correlação cruzada entre o vetor de estado no instante k e o ruído do vetor de medição	Vide eq. 3.68
11	Executar a atualização segundo a estimativa LMMSE	Vide eqs. 3.69, 3.70 e 3.71
12	(OPCIONAL) Verificar se a matriz de covariância atualizada gerada é positiva definida. Se não for, recomputá-la com a fórmula estabilizada de Joseph aproximada	Vide eq. 3.74

permanece constante durante esse intervalo. Dessa forma, sua forma discreta é

$$\mathbf{x}_k = e^{\mathbf{A}(t_{k-1})\Delta}\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} \ , \tag{3.76}$$

onde $\mathbf{F}_{k-1} = e^{\mathbf{A}(t_{k-1})\Delta}$ e $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$.

Pode-se provar (VANVALKENBURG, 2012) que, para qualquer matriz $\mathbf{B}$ quadrada

$$det(e^{\mathbf{B}}) = e^{tr(\mathbf{B})} > 0 \ , \tag{3.77}$$

onde $tr(.)$ indica o operador traço.

Dessa forma, conclui-se que, no problema de estimação de erros de navegação, a inversa da matriz de modelo sempre irá existir e esse método poderá ser corretamente aplicado.

4 Análises e Exemplo Numérico Simplificado

Neste capítulo estão presentes análises do ponto de vista teórico para os algoritmos apresentados no capítulo 3. Na seção 4.1 encontra-se uma análise da performance esperada de cada algoritmo. Esta análise foi feita supondo um processo Gaussiano e utilizando uma interpretação Bayesiana para comparar, do ponto de vista teórico, o desempenho de cada um dos métodos. Na seção 4.2 é mostrada a quantidade de memória que cada método necessita. Na seção 4.3 encontra-se o número de operações de ponto flutuante que cada método executa para incorporação de uma medida atrasada no intuito de comparar a carga computacional entre as metodologias. Finalmente, na seção 4.4 está presente um exemplo numérico simplificado para uma validação inicial dos algoritmos propostos.

4.1 Análise Teórica da Performance dos Algoritmos

Nesta seção será avaliado o desempenho esperado de cada um dos três algoritmos apresentados. Deve-se notar que a reiteração do filtro de Kalman produz a mesma estimativa de qualquer outro método ótimo avaliado por Besada-Portas *et al.* (2009), diferindo apenas na quantidade de informações a ser armazenada e na carga computacional.

O filtro Bayesiano ótimo para cada nó é aquele que consegue computar a f.d.p. (ARULAMPALAM *et al.*, 2002)

$$p(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_k) \tag{4.1}$$

para todo k. Quando não existem atrasos, a medida fundida que engloba toda a informação que o i-ésimo nó teve acesso no instante k pode ser escrita como

$$\mathbf{y}^f_{k,i} = \mathbf{H}^f_{k,i}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}^f_{k,i} \,. \tag{4.2}$$

Dessa forma, utilizando a regra de Bayes em 4.1 e o fato que $\boldsymbol{\Omega}_{k,i} = \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i} \bigcup \mathbf{y}^f_{k,i}$, pode-se escrever

$$p(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k,i}) = \frac{p(\mathbf{y}^f_{k,i}|\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})p(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})}{p(\mathbf{y}^f_{k,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})} = \frac{p(\mathbf{y}^f_{k,i}|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})}{p(\mathbf{y}^f_{k,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})} \,, \tag{4.3}$$

pois $p(\mathbf{y}^f_{k,i}|\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) = p(\mathbf{y}^f_{k,i}|\mathbf{x}_k)$ devido à 4.2 e à suposição que os ruídos de medição são brancos e independentes entre si, dos ruídos de modelagem e do estado inicial.

Pode-se mostrar que se o sistema for linear e Gaussiano, então a f.d.p. $p(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_k)$ será uma Gaussiana cuja média e covariância podem ser calculadas recursivamente através das equações que compõe o filtro de Kalman (ARULAMPALAM *et al.*, 2002). Logo, os passos de predição e atualização propagam a f.d.p. do filtro Bayesiano ótimo e, por isso, o filtro de Kalman nesse cenário é o filtro ótimo (ANDERSON; MOORE, 1979).

Quando medidas atrasadas são recebidas pelo i-ésimo nó no instante k, a equação 4.2 é inválida. A reiteração do filtro de Kalman, ou abordagem clássica, foi construída para retornar o filtro de Kalman ao instante em que cada medida atrasada foi gerada e fundi-la para garantir o cálculo correto da f.d.p. em 4.1. Dessa forma, após a execução do algoritmo, assegura-se nos casos lineares e Gaussianos que a média e a covariância da f.d.p. em 4.1 sejam corretamente calculadas, preservando a otimalidade.

De outra maneira, tanto o método de extrapolação de medidas como o método de transporte de medidas buscam incorporar o vetor fundido com as medidas atrasadas utilizando a estimativa linear de mínimo erro médio quadrático diretamente. Dessa forma, o passo de atualização é feito de acordo com

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k,i} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{C}^{xy}_{k,i}\mathbf{C}^{yy,-1}_{k,i}(\mathbf{y}^{u}_{k,i} - E\{\mathbf{y}^{u}_{k,i}\}) \ , \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{C}^{xy}_{k,i}\mathbf{C}^{yy,-1}_{k,i}\mathbf{C}^{xy,T}_{k,i} \ , \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $\mathbf{y}^{u}_{k,i}$ é a medida que concatena a informação da rede, ou seja,

$$\mathbf{y}^{u}_{k,i} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{f,T}_{k,\Delta_0,i} & \mathbf{y}^{f,T}_{k,\Delta_1,i} & \cdots & \mathbf{y}^{f,T}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix}^{T} \tag{4.5}$$

e $\mathbf{C}^{xy}_{k,i}\mathbf{C}^{yy,-1}_{k,i}$ não depende de nenhum vetor em $\mathbf{\Omega}_{k-1,i}$. Sabe-se que essa estimativa, se calculada adequadamente, irá fornecer a menor covariância do erro de estimação possível dentre todas as classes de estimadores do tipo

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k,i} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{K}_{k,i}(\mathbf{y}^{u}_{k,i} - \mathbf{a}_{k,i}) \ , \tag{4.6}$$

onde a matriz $\mathbf{K}_{k,i}$ e o vetor $\mathbf{a}_{k,i}$ não dependem de nenhuma medida no conjunto $\mathbf{\Omega}_{k-1,i}$ (ANDERSON; MOORE, 1979).

Na sequência, será mostrado que o resíduo $\mathbf{r}_{k,i} = \mathbf{y}^{u}_{k,i} - E\{\mathbf{y}^{u}_{k,i}\}$ calculado pelo método extrapolação de medidas e pelo o método transporte de medidas são iguais. De 3.1 e 3.33, verifica-se que a n-ésima linha-bloco do resíduo para o método extrapolação de medidas, que é associada aos vetores recebidos pelo i-ésimo nó no instante k com atraso de Δ_n, é

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}^{em}_{k,i}(n) = \mathbf{y}^{em}_{k,i}(n) - \mathbf{H}^{em}_{k,i}(n)\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \ , \\
&\mathbf{r}^{em}_{k,i}(n) = \mathbf{y}^{f,EXT}_{k,\Delta_n,i} - \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}(\mathbf{F}^{*}_{\Delta_n}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \mathbf{u}^{*}_{\Delta_n} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}) - \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \ , \\
&\mathbf{r}^{em}_{k,i}(n) = \mathbf{y}^{f}_{k,\Delta_n,i} + \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i} - \\
&\quad - \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}(\mathbf{F}^{*}_{\Delta_n}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \mathbf{u}^{*}_{\Delta_n} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}) - \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \ , \\
&\mathbf{r}^{em}_{k,i}(n) = \mathbf{y}^{f}_{k,\Delta_n,i} + \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\mathbf{u}^{*}_{\Delta_n} - \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\mathbf{F}^{*}_{\Delta_n}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \ .
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Então, utilizando 3.29 e 3.30, obtém-se

$$\mathbf{r}^{em}_{k,i}(n) = \mathbf{y}^{f}_{k,\Delta_n,i} + \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\sum_{j=1}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\mathbf{B}_{k-j}\mathbf{u}_{k-j}\right) - \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \ . \tag{4.8}$$

Analogamente, para o método transporte de medida, o resíduo da n-ésima linha-bloco pode ser calculado utilizando 3.42, 3.43, 3.44, 3.47 e 3.70 de acordo com

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}^{tm}_{k,i}(n) = \mathbf{y}^{tm}_{k,i}(n) - \mathbf{H}^{tm}_{k,i}(n)\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \ , \\
&\mathbf{r}^{tm}_{k,i}(n) = \mathbf{y}^{p}_{k,\Delta_n,i} - \mathbf{u}^{p}_{k,\Delta_n,i} - \mathbf{H}^{p}_{k,\Delta_n,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \ , \\
&\mathbf{r}^{tm}_{k,i}(n) = \mathbf{y}^{f}_{k,\Delta_n,i} + \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\sum_{j=1}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\mathbf{B}_{k-j}\mathbf{u}_{k-j}\right) - \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \ ,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

onde se observa que $\mathbf{r}^{em}_{k,i}(n) = \mathbf{r}^{tm}_{k,i}(n)$, $\forall n \in [0,1,2,\cdots,L]$, $\forall k$. Em outras palavras, os métodos extrapolação de medidas e transporte de medidas computam exatamente o mesmo resíduo. Entretanto, em relação ao ganho, é fácil verificar que os dois métodos não fornecem valores equivalentes. A extrapolação de medidas, através das aproximações em 3.11, computa um ganho aproximado, enquanto que o transporte de medidas computa as matrizes $\mathbf{C}^{xy}_{k,i}$ e $\mathbf{C}^{yy}_{k,i}$ de forma exata. Logo, a atualização da covariância para o primeiro método será aproximada, enquanto que para o segundo será exata com base na estimativa linear de mínimo erro médio quadrático definida em 4.4. Devido a isso, é esperado que o desempenho do método transporte de medidas seja superior ao método extrapolação de medidas.

Prosseguindo, para obter a f.d.p. do filtro Bayesiano ótimo após a fusão do vetor $\mathbf{y}_{k,i}^{u}$, o i-ésimo nó deve calcular

$$p(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k,i}) = \frac{p(\mathbf{y}_{k,i}^{u}|\mathbf{x}_k,\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})p(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})}{p(\mathbf{y}_{k,i}^{u}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})} \ . \tag{4.10}$$

Entretanto, diferentemente do caso anterior, $p(\mathbf{y}_{k,i}^{u}|\mathbf{x}_k,\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) \neq p(\mathbf{y}_{k,i}^{u}|\mathbf{x}_k)$, pois o vetor $\mathbf{y}_{k,i}^{u}$ conterá medidas de diferentes instantes passados e não pode ser escrito de acordo com 4.2. A seguir, será mostrado que aproximação deverá ser assumida para que o cálculo aproximado da f.d.p. $p(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k,i})$ seja feito conforme o método de transporte de medidas.

Utilizando a equação de Chapman-Kolmogorov, pode-se escrever (PAPOULIS, 1991)

$$p(\mathbf{y}_{k,i}^{u}|\mathbf{x}_k,\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) = \int_{\mathbb{R}^{k\cdot M}} p(\mathbf{y}_{k,i}^{u}|\mathbf{x}_{0:k},\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{x}_k,\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})d\mathbf{x}_{0:k-1} \ , \tag{4.11}$$

onde é utilizada a notação

$$\int_{\mathbb{R}^{k\cdot M}} f(\mathbf{x}_{0:k-1})d\mathbf{x}_{0:k-1} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^M}\int_{\mathbb{R}^M}\cdots\int_{\mathbb{R}^M}}_{\text{k integrais}} f(\mathbf{x}_{0:k-1})d\mathbf{x}_0 d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_{k-1} \ . \tag{4.12}$$

Na sequência, de acordo com 4.5, o vetor $\mathbf{y}_{k,i}^{u}$ é formado pelos vetores de medidas $\mathbf{y}_{k,\Delta_n,i}^{f}$, $n \in [0,1,\cdots,L]$, que possuem atraso de Δ_n instantes de amostragem. Lembrando que cada vetor pode ser escrito conforme 2.16, então, devido às considerações sobre o ruído de medição, $\mathbf{y}_{k,\Delta_n,i}^{f}$ é independente de qualquer outro vetor concatenado em $\mathbf{y}_{k,i}^{u}$ quando condicionado em $\mathbf{x}_{k-\Delta_n}$.

Claramente essa conclusão vale $\forall n \in [0, 1, \cdots, L]$. Dessa forma, escreve-se (PAPOULIS, 1991)

$$p(\mathbf{y}^u_{k,i}|\mathbf{x}_{0:k}, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) = \prod_{n=0}^{L} p(\mathbf{y}^f_{k,\Delta_n,i}|\mathbf{x}_{0:k}, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) \ . \tag{4.13}$$

Mais um vez devido à 2.16 e às suposições dos ruídos de medição, sabe-se que, condicionado em $\mathbf{x}_{k-\Delta_n}$, $\mathbf{y}^f_{k,\Delta_n,i}$ é independente de $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{k-\Delta_n-1}, \mathbf{x}_{k-\Delta_n+1}, \cdots, \mathbf{x}_k$ e $\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}$. Logo (PAPOULIS, 1991; DOUCET, 1998)

$$p(\mathbf{y}^u_{k,i}|\mathbf{x}_{0:k}, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) = \prod_{n=0}^{L} p(\mathbf{y}^f_{k,\Delta_n,i}|\mathbf{x}_{k-\Delta_n}) = \prod_{n=0}^{L} \mathcal{N}(\mathbf{y}^f_{k,\Delta_n,i}; \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\mathbf{x}_{k-\Delta_n}, \mathbf{R}^f_{k,\Delta_n,i}) \ , \tag{4.14}$$

onde $\mathcal{N}(\mathbf{x};\mathbf{m},\mathbf{R})$ é a função densidade de probabilidade da variável aleatória Gaussiana $\mathbf{x}$ com média $\mathbf{m}$ e covariância $\mathbf{R}$. Dessa forma, pode-se concluir que

$$p(\mathbf{y}^u_{k,i}|\mathbf{x}_{0:k}, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) = p(\mathbf{y}^u_{k,i}|\mathbf{x}^d_{k,i}) \ , \tag{4.15}$$

onde

$$\mathbf{x}^d_{k,i} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T_{k-\Delta_0} & \mathbf{x}^T_{k-\Delta_1} & \cdots & \mathbf{x}^T_{k-\Delta_L} \end{bmatrix}^T \ . \tag{4.16}$$

Prosseguindo, utilizando 4.14 se obtém (PAPOULIS, 1991)

$$p(\mathbf{y}^u_{k,i}|\mathbf{x}_{0:k}, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}^u_{k,i}; \mathbf{H}^d_{k,i}\mathbf{x}^d_{k,i}, \mathbf{R}^d_{k,i}) \ , \tag{4.17}$$

onde

$$\mathbf{H}^{d}_{k,i} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_0,i} & \mathbf{0}_{M\times M} & \cdots & \mathbf{0}_{M\times M} \\ \mathbf{0}_{M\times M} & \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_1,i} & \cdots & \mathbf{0}_{M\times M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{M\times M} & \mathbf{0}_{M\times M} & \cdots & \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix} , \tag{4.18}$$

$$\mathbf{R}^{d}_{k,i} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{f}_{k,\Delta_0,i} & \mathbf{0}_{M\times M} & \cdots & \mathbf{0}_{M\times M} \\ \mathbf{0}_{M\times M} & \mathbf{R}^{f}_{k,\Delta_1,i} & \cdots & \mathbf{0}_{M\times M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{M\times M} & \mathbf{0}_{M\times M} & \cdots & \mathbf{R}^{f}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix} . \tag{4.19}$$

Pode-se verificar que o cálculo da f.d.p. $p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})$ em 4.11 requer uma suavização. Para isso, note que

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) &\propto p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{0:k-1}, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) = \\ &= p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) \ , \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{0:k-1}, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) = p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})$ pois $\mathbf{x}_k$ é modelado por uma cadeia de Markov de primeira ordem segundo 2.3. A constante de proporcionalidade é selecionada para que se tenha

$$\int_{R^{k\cdot M}} p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})d\mathbf{x}_{0:k-1} = 1 \ . \tag{4.21}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) &\propto p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{x}_{0:k-2}, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})p(\mathbf{x}_{0:k-2}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) = \\ &= p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{x}_{k-2}, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})p(\mathbf{x}_{0:k-2}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) \ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

Então, repetindo esse processo mais $k-1$ vezes, obtém-se

$$p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{x}_k,\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) \propto \prod_{n=0}^{k-1}\left[p(\mathbf{x}_{k-n}|\mathbf{x}_{k-n-1},\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})\right] p(\mathbf{x}_0|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) \;, \tag{4.23}$$

onde se verifica que o cálculo de $p(\mathbf{x}_0|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})$ envolverá uma recursão e, para tal, todos os vetores de medidas fundidos deverão ser armazenados (ANDERSON; MOORE, 1979). Para eliminar essa necessidade, será feita a seguinte aproximação

$$p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{x}_k,\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) \approx p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{x}_k) \;. \tag{4.24}$$

Neste contexto, verifique que, utilizando 4.11, 4.15 e 4.17, se obtém

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{y}^u_{k,i}|\mathbf{x}_k,\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) &\approx \int_{\mathbb{R}^{k\cdot M}} p(\mathbf{y}^u_{k,i}|\mathbf{x}_{0:k},\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{x}_k)d\mathbf{x}_{0:k-1} = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{(L+1)\cdot M}}\int_{\mathbb{R}^{(k-L-1)\cdot M}} p(\mathbf{y}^u_{k,i}|\mathbf{x}^d_{k,i})p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{x}_k)d\bar{\mathbf{x}}^d_{k,i}d\mathbf{x}^d_{k,i} = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{(L+1)\cdot M}} \underbrace{p(\mathbf{y}^u_{k,i}|\mathbf{x}^d_{k,i})}_{\text{Independente de } \bar{\mathbf{x}}^d_{k,i}} \left[\int_{\mathbb{R}^{(k-L-1)\cdot M}} p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{x}_k)d\bar{\mathbf{x}}^d_{k,i}\right] d\mathbf{x}^d_{k,i} = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{(L+1)\cdot M}} \mathcal{N}(\mathbf{y}^u_{k,i};\mathbf{H}^d_{k,i}\mathbf{x}^d_{k,i},\mathbf{R}^d_{k,i}) \left[\int_{\mathbb{R}^{(k-L-1)\cdot M}} p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{x}_k)d\bar{\mathbf{x}}^d_{k,i}\right] d\mathbf{x}^d_{k,i} \;,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

onde $\bar{\mathbf{x}}^d_{k,i}$ é o vetor complementar de $\mathbf{x}^d_{k,i}$ no sentido que $\mathbf{x}^d_{k,i}\bigcup\bar{\mathbf{x}}^d_{k,i} = \mathbf{x}_{0:k-1}$. Logo, utilizando a lei da marginalização (PAPOULIS, 1991), obtém-se

$$p(\mathbf{y}^u_{k,i}|\mathbf{x}_k,\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) \approx \int_{\mathbb{R}^{(L+1)\cdot M}} \mathcal{N}(\mathbf{y}^u_{k,i};\mathbf{H}^d_{k,i}\mathbf{x}^d_{k,i},\mathbf{R}^d_{k,i})p(\mathbf{x}^d_{k,i}|\mathbf{x}_k)d\mathbf{x}^d_{k,i} \;. \tag{4.26}$$

Assim, falta calcular a f.d.p. $p(\mathbf{x}^d_{k,i}|\mathbf{x}_k)$. Isto pode ser feito utilizando o fato que os vetores $\mathbf{x}_{k-\Delta_0},\mathbf{x}_{k-\Delta_1},\cdots,\mathbf{x}_{k-\Delta_L}$ são conjuntamente Gaussianos, uma vez que o modelo em 2.3 é linear e Gaussiano (ANDERSON; MOORE, 1979). Para calcular a média, basta observar 3.41. Desta forma

$$\mathbf{m}^x_{k,i} \triangleq E\{\mathbf{x}^d_{k,i}|\mathbf{x}_k\} = \begin{bmatrix} E\{\mathbf{x}_{k-\Delta_0}|\mathbf{x}_k\} \\ E\{\mathbf{x}_{k-\Delta_1}|\mathbf{x}_k\} \\ \vdots \\ E\{\mathbf{x}_{k-\Delta_L}|\mathbf{x}_k\} \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

onde

$$E\{\mathbf{x}_{k-\Delta_n}|\mathbf{x}_k\} = \left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1} \mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\mathbf{x}_k - \sum_{j=1}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j} \mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\mathbf{B}_{k-j}\mathbf{u}_{k-j}\right). \tag{4.28}$$

A matriz de covariância, por sua vez, pode ser obtida através do mesmo algebrismo utilizado para se obter 3.52, 3.53 e 3.54, que está provado no apêndice F. Para isso, basta notar que 3.41 e 4.28 fornecem

$$\mathbf{x}_{k-n} - E\{\mathbf{x}_{k-n}|\mathbf{x}_k\} = -\mathbf{H}^f_{k,n,i}\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\prod_{l=0}^{n-j} \mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\right). \tag{4.29}$$

Assim, conclui-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^x_{k,i} &\triangleq cov(\mathbf{x}^d_{k,i}, \mathbf{x}^d_{k,i}|\mathbf{x}_k) = \\ &= \begin{bmatrix} cov(\mathbf{x}_{k-\Delta_0}, \mathbf{x}_{k-\Delta_0}|\mathbf{x}_k) & cov(\mathbf{x}_{k-\Delta_0}, \mathbf{x}_{k-\Delta_1}|\mathbf{x}_k) & \cdots & cov(\mathbf{x}_{k-\Delta_0}, \mathbf{x}_{k-\Delta_L}|\mathbf{x}_k) \\ cov(\mathbf{x}_{k-\Delta_1}, \mathbf{x}_{k-\Delta_0}|\mathbf{x}_k) & cov(\mathbf{x}_{k-\Delta_1}, \mathbf{x}_{k-\Delta_1}|\mathbf{x}_k) & \cdots & cov(\mathbf{x}_{k-\Delta_1}, \mathbf{x}_{k-\Delta_L}|\mathbf{x}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\mathbf{x}_{k-\Delta_L}, \mathbf{x}_{k-\Delta_0}|\mathbf{x}_k) & cov(\mathbf{x}_{k-\Delta_L}, \mathbf{x}_{k-\Delta_1}|\mathbf{x}_k) & \cdots & cov(\mathbf{x}_{k-\Delta_L}, \mathbf{x}_{k-\Delta_L}|\mathbf{x}_k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

em que

$$cov(\mathbf{x}_{k-\Delta_n}, \mathbf{x}_{k-\Delta_m}|\mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^{min(\Delta_n,\Delta_m)} \left[\prod_{l=0}^{\Delta_n - j} \mathbf{F}_{k-(\Delta_n - l)}^{-1}\right] \mathbf{Q}_{k-j} \left[\prod_{l=0}^{\Delta_m - j} \mathbf{F}_{k-(\Delta_m - l)}^{-1}\right]^T , \tag{4.31}$$

onde a demonstração é análoga àquela mostrada no apêndice F para se obter F.5. Prosseguindo, pode-se escrever

$$p(\mathbf{x}_{k,i}^d|\mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k,i}^d; \mathbf{m}_{k,i}^x, \mathbf{R}_{k,i}^x) \tag{4.32}$$

e, substituindo esse resultado em 4.26, obtém-se

$$p(\mathbf{y}_{k,i}^u|\mathbf{x}_k, \mathbf{\Omega}_{k-1,i}) \approx \int_{\mathbb{R}^{(L+1)\cdot M}} \mathcal{N}(\mathbf{y}_{k,i}^u; \mathbf{H}_{k,i}^d \mathbf{x}_{k,i}^d, \mathbf{R}_{k,i}^d) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k,i}^d; \mathbf{m}_{k,i}^x, \mathbf{R}_{k,i}^x) d\mathbf{x}_{k,i}^d . \tag{4.33}$$

Para calcular a integral em 4.33, deve-se observar a integral no passo de predição do filtro de Kalman utilizando a equação de Chapman-Kolmogorov (ARULAMPALAM *et al.*, 2002):

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{0:k-1}) &= \int_{\mathbb{R}^M} p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{0:k-1}) \cdot p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{0:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^M} p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) \cdot p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{0:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} . \end{aligned} \tag{4.34}$$

Então, substituindo as f.d.p. nesta equação por Gaussianas geradas no problema linear, obtém-se (HO; LEE, 1964; ANDERSON; MOORE, 1979)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_{k-1}) \cdot \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} = \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}) . \end{aligned} \tag{4.35}$$

Na sequência, realizando a seguinte substituição de parâmetros (CHAGAS; WALDMANN, 2012d):

- $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{y}^u_{k,i}$, $\mathbf{F}_{k-1} \rightarrow \mathbf{H}^d_{k,i}$, $\mathbf{x}_{k-1} \rightarrow \mathbf{x}^d_{k,i}$, $\mathbf{Q}_{k-1} \rightarrow \mathbf{R}^d_{k,i}$, $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \rightarrow \mathbf{m}^x_{k,i}$, $\mathbf{P}_{k-1|k-1} \rightarrow \mathbf{R}^x_{k,i}$ e $M \rightarrow (L+1)\cdot M$,

as dimensões na integral em 4.35 ficam consistentes e o resultado se torna

$$\int_{\mathbb{R}^{(L+1)\cdot M}} \mathcal{N}(\mathbf{y}^u_{k,i};\mathbf{H}^d_{k,i}\mathbf{x}^d_{k,i},\mathbf{R}^d_{k,i})\mathcal{N}(\mathbf{x}^d_{k,i};\mathbf{m}^x_{k,i},\mathbf{R}^x_{k,i})d\mathbf{x}^d_{k,i} = \mathcal{N}(\mathbf{y}^u_{k,i};\mathbf{H}^d_{k,i}\mathbf{m}^x_{k,i},\mathbf{H}^d_{k,i}\mathbf{R}^x_{k,i}\mathbf{H}^{d,T}_{k,i}+\mathbf{R}^d_{k,i})\ . \tag{4.36}$$

Pode-se verificar utilizando 4.19, 4.30 e 4.31 que

$$\mathbf{H}^d_{k,i}\mathbf{R}^x_{k,i}\mathbf{H}^{d,T}_{k,i}+\mathbf{R}^d_{k,i} = \mathbf{R}^{tm}_{k,i}\ , \tag{4.37}$$

onde $\mathbf{R}^{tm}_{k,i}$ é definido em 3.56. Analogamente, sabe-se que (PAPOULIS, 1991)

$$\mathcal{N}(\mathbf{y}^u_{k,i};\mathbf{H}^d_{k,i}\mathbf{m}^x_{k,i},\mathbf{H}^d_{k,i}\mathbf{R}^x_{k,i}\mathbf{H}^{d,T}_{k,i}+\mathbf{R}^d_{k,i}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}^u_{k,i}-\mathbf{u}^{tm}_{k,i};\mathbf{H}^d_{k,i}\mathbf{m}^x_{k,i}-\mathbf{u}^{tm}_{k,i},\mathbf{H}^d_{k,i}\mathbf{R}^x_{k,i}\mathbf{H}^{d,T}_{k,i}+\mathbf{R}^d_{k,i})\ , \tag{4.38}$$

com $\mathbf{u}^{tm}_{k,i}$ definido de acordo com 3.48. Além disso, verifica-se que

$$\mathbf{y}^u_{k,i}-\mathbf{u}^{tm}_{k,i} = \mathbf{y}^{tm}_{k,i} \tag{4.39}$$

de acordo com 3.42 e 3.47. Adicionalmente, tem-se

$$\mathbf{H}^d_{k,i}\mathbf{m}^x_{k,i}-\mathbf{u}^{tm}_{k,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^f_{k,\Delta_0,i}E\{\mathbf{x}_{k-\Delta_0}|\mathbf{x}_k\}-\mathbf{u}^p_{k,\Delta_0,i} \\ \mathbf{H}^f_{k,\Delta_1,i}E\{\mathbf{x}_{k-\Delta_1}|\mathbf{x}_k\}-\mathbf{u}^p_{k,\Delta_1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^f_{k,\Delta_L,i}E\{\mathbf{x}_{k-\Delta_L}|\mathbf{x}_k\}-\mathbf{u}^p_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

e, utilizando 3.44 e 4.28, obtém-se

$$\mathbf{H}^{d}_{k,i}\mathbf{m}^{x}_{k,i} - \mathbf{u}^{tm}_{k,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_0,i}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_0-1}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_0-l)}\right] \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_1,i}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_1-1}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_1-l)}\right] \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_L,i}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_L-1}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_L-l)}\right] \end{bmatrix} \mathbf{x}_k = \mathbf{H}^{tm}_{k,i}\mathbf{x}_k \ , \tag{4.41}$$

em que $\mathbf{H}^{tm}_{k,i}$ é definido de acordo com 3.49. Logo,

$$\mathcal{N}(\mathbf{y}^{u}_{k,i} - \mathbf{u}^{tm}_{k,i}; \mathbf{H}^{d}_{k,i}\mathbf{m}^{x}_{k,i} - \mathbf{u}^{tm}_{k,i}, \mathbf{H}^{d}_{k,i}\mathbf{R}^{x}_{k,i}\mathbf{H}^{d,T}_{k,i} + \mathbf{R}^{d}_{k,i}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}^{tm}_{k,i}; \mathbf{H}^{tm}_{k,i}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}^{tm}_{k,i}) \ . \tag{4.42}$$

Desta forma, conclui-se que

$$p(\mathbf{y}^{u}_{k,i}|\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) \approx \mathcal{N}(\mathbf{y}^{u}_{k,i}; \mathbf{H}^{d}_{k,i}\mathbf{m}^{x}_{k,i}, \mathbf{H}^{d}_{k,i}\mathbf{R}^{x}_{k,i}\mathbf{H}^{d,T}_{k,i} + \mathbf{R}^{d}_{k,i}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}^{tm}_{k,i}; \mathbf{H}^{tm}_{k,i}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}^{tm}_{k,i}) \ . \tag{4.43}$$

Com isso, o passo de atualização de filtro Bayesiano ótimo em 4.10 se torna

$$p(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k,i}) \approx C_{k,i}\mathcal{N}(\mathbf{y}^{tm}_{k,i}; \mathbf{H}^{tm}_{k,i}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}^{tm}_{k,i})\mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \ , \tag{4.44}$$

onde $C_{k,i}$ é uma constante que fornecerá $\int_{\mathbb{R}^M} p(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k,i})d\mathbf{x}_k = 1$ (ARULAMPALAM *et al.*, 2002) e foi utilizado o fato conhecido que $p(\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})$ (ARULAMPALAM *et al.*, 2002). Assim, verifica-se que essa equação fornecerá uma f.d.p. Gaussiana cuja a média e covariância serão calculadas pelo passo de atualização do filtro de Kalman usual utilizando o vetor $\mathbf{y}^{tm}_{k,i}$, no qual o seu ruído de medida possui correlação com o ruído de modelo dada pela matriz $\mathbf{S}_{k,i}$ em 3.68. Isto indica que foi obtido um algoritmo idêntico ao método transporte de medidas apresentado na seção 3.3.

Finalmente, a análise induz à conclusão que o método transporte de medidas terá uma performance esperada pior do que a abordagem clássica, ou reiteração do filtro de Kalman. Isso é evidente devido a necessidade de se desprezar as medidas no cálculo da f.d.p. em 4.24. Caso essa aproximação não tivesse sido feita, o resultado obtido seria idêntico àquele fornecido pela abordagem clássica, pois a f.d.p. da atualização do filtro Bayesiano seria calculada de maneira exata. Entretanto, para isso será necessário realizar uma suavização, o que aumentaria a carga computacional e a necessidade de memória do método.

Conclui-se então que, dentre os três métodos, espera-se que a abordagem clássica possua a melhor performance, seguida do transporte de medidas e, por último, a extrapolação de medidas.

4.2 Análise da Necessidade de Memória para cada Método

Nesta análise será considerado que todos os nós possuem acesso direto às matrizes de covariância do ruído de medição e às matrizes dinâmicas entre o instante atual e o instante $k - max$ (BESADA-PORTAS *et al.*, 2009). Além disso, a simetria das matrizes de covariância será desprezada no cálculo da quantidade necessária de memória, cujo resultado fornecerá valores que poderão ser comparados com aqueles calculados por Besada-Portas *et al.* (2009).

A reiteração do filtro de Kalman, ou abordagem clássica, requer o armazenamento dos vetores de medição com suas respectivas estatísticas, os estados estimados com suas covariâncias preditas e os vetores de controle, desde o instante de amostragem em que a medida atrasada foi auferida até o instante atual. Dessa forma, a quantidade de informação que deve ser armazenada por este algoritmo pode ser obtida através de

$$I_{AC} = \underbrace{max \cdot (2M + 2M^2)}_{\text{informações sobre medidas e estados}} + \underbrace{max \cdot M}_{\text{vetores de controle}}, \tag{4.45}$$

onde M é a dimensão do estado e max é o máximo atraso admissível.

Para o método extrapolação de medidas é necessário armazenar:

1. os vetores de controle entre os instantes $k-1$ e $k-max$;
2. as estimativas preditas entre os instantes $k-1$ e $k-max$;
3. as matrizes de covariância do erro de estimação preditas entre os instantes $k-1$ e $k-max$;
4. as matrizes $\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m)$, $0 \leq n \leq max-1$, $0 \leq m \leq max-1$, $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (eq. 3.23); e
5. as inversas das matrizes dinâmicas entre $k-1$ e $k-max$ para reduzir a carga computacional.

Dessa forma, verifica-se que a quantidade de informação que deve ser armazenada para a utilização desse método é

$$\begin{aligned} I_{EM} &= \underbrace{max \cdot M}_{(1)} + \underbrace{max \cdot M}_{(2)} + \underbrace{max \cdot M^2}_{(3)} + \underbrace{max^2 \cdot M^2}_{(4)} + \underbrace{max \cdot M^2}_{(5)} = \\ &= max \cdot (M + [2 + max] \cdot M^2) + max \cdot M \ . \end{aligned} \tag{4.46}$$

Se não for desejado armazenar as matrizes $\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m)$ devido à grande quantidade de memória necessária, deve-se então guardar as matrizes

$$\mathbf{F}_k \left(\mathbf{I}_{M \times M} - \mathbf{K}_{k,i} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_0,i} & \cdots & \mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix}^T \right) \tag{4.47}$$

entre os instantes $k-max$ e $k-1$ para computar as matrizes $\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m)$ quando necessário. Dessa forma, a necessidade de memória se torna

$$\begin{aligned} I_{EM} &= max \cdot M + max \cdot M + max \cdot M^2 + \max \cdot M^2 + max \cdot M^2 = \\ &= max \cdot (M + 3 \cdot M^2) + max \cdot M \ . \end{aligned} \tag{4.48}$$

Finalmente, para o transporte de medidas se observa que basta armazenar os vetores de controle e, opcionalmente, as inversas das matrizes de modelo para redução da carga computacional entre os instantes $k-max$ e $k-1$. Dessa forma, a quantidade de informações necessárias para que esta técnica possa ser utilizada é

$$I_{TM} = max \cdot M^2 + max \cdot M \ , \tag{4.49}$$

onde se observa que este método possui a menor necessidade de memória entre os três métodos apresentados e os analisados na compilação feita por Besada-Portas *et al.* (2009).

Conclui-se, então, que o método extrapolação de medidas requer a maior quantidade de memória, seguido pela abordagem clássica e, por último, o transporte de medidas.

4.3 Análise do Número de Operações de Ponto Flutuante

Neste seção será calculado, de forma aproximada, o número de operações de ponto flutuante (*FLOPs*) que cada um dos algoritmos requer para a incorporação no instante k de apenas uma medida atrasada de n instantes de amostragem. Dessa forma, $L = 0$ e $\Delta_0 = n$. A análise trata somente do caso linear. Aqui, será considerado que o vetor de controle apresenta a mesma dimensão do estado e que a matriz $\mathbf{B}_k$ é igual à identidade para todo k. Adicionalmente, observe que, após a transformação dada por 2.16, os vetores de medidas também possuirão a mesma dimensão do estado.

Para realizar o cálculo do número de *FLOPs*, foi utilizado o relatório técnico de Hunger (2007), que contém o número de FLOPs para diversas operações matriciais. Os dados utilizados estão presentes na tabela 4.1 por questões de completude.

TABELA 4.1 – Número de operações de ponto flutuante para algumas operações matriciais (HUNGER, 2007).

Operação	***FLOPs***
$\mathbf{x}_{M\times 1} \pm \mathbf{y}_{M\times 1}$	M
$\mathbf{A}_{M\times M} \pm \mathbf{B}_{M\times M}$	M^2
$\mathbf{A}_{M\times M} \cdot \mathbf{x}_{M\times 1}$	$2M^2 - M$
$\mathbf{A}_{M\times M} \cdot \mathbf{B}_{M\times M}$	$2M^3 - M^2$
$\mathbf{A}^{-1}$, com $\mathbf{A}$ positiva definida	$M^3 + M^2 + M$
$\mathbf{A}_{M\times M} \cdot \mathbf{B}_{M\times M} \cdot \mathbf{A}^T_{M\times M}$	$4M^3 - 2M^2$
$\mathbf{y}_{M\times M} \pm \mathbf{A}_{M\times M} \cdot \mathbf{x}_{M\times 1}$	$2M^2$
$\mathbf{A}_{M\times M} \cdot \mathbf{B}_{M\times M} \cdot \mathbf{A}^T_{M\times M} \pm \mathbf{C}_{M\times M}$	$4M^3 - M^2$

Com esses dados, pode-se computar o número de *FLOPs* necessários para a predição e atualização do filtro de Kalman utilizando a fórmula estabilizada de Joseph para atualização da covariância:

- Predição do filtro de Kalman: $4M^3 + M^2$ *FLOPs*; e
- Atualização do filtro de Kalman: $17M^3 + M$ *FLOPs*.

Para o método da reiteração do filtro de Kalman, o resultado está na tabela 4.2. Para a extrapolação de medidas, o resultado encontra-se na tabela 4.3, onde se deve notar que foi considerado que o nó não armazena as matrizes $\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m)$. Embora isso possa fornecer uma carga computacional menor, conforme comentado na seção 3.2, faria com que o número de operações de ponto flutuante dependesse de *max*, o valor do maior atraso permitido, o que tornaria a comparação entre métodos menos direta. Finalmente, o resultado para o transporte de medidas se encontra na tabela 4.4.

TABELA 4.2 – *FLOPs* necessários para a reiteração do filtro de Kalman fundir uma medida atrasada de n instantes de amostragem.

Cálculo	***FLOPs***
Vetor $\mathbf{y}^d_{k,j,i}$	M
Matriz $\mathbf{R}^d_{k,j,i}$	M^2
n passos de atualização do Filtro de Kalman	$(17n)M^3+(n)M$
n passos de predição do Filtro de Kalman	$(4n)M^3+(n)M^2$
Total:	$(21n)M^3+(n+1)M^2+(n+1)M$

TABELA 4.3 – *FLOPs* necessários para a extrapolação de medidas fundir uma medida atrasada de n instantes de amostragem.

Cálculo	***FLOPs***
Predição do Filtro de Kalman	$(4)M^3+(1)M^2$
Extrapolação da medida (eq. 3.1)	$(4)M^2+(2)M$
Matriz $\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(0;n)$ (eq. 3.11)	$(2n)M^3+(-n)M^2$
Matriz $\mathbf{F}^*_n$ (eq. 3.29)	$(2n)M^3+(-n)M^2$
Vetor $\mathbf{u}^*_n$ (eq. 3.30)	$(2n)M^2+(-1)M$
Vetor $\mathbf{T}_{k,i}$ (eq. 3.32)	$(4)M^2$
Ganho $\mathbf{K}_{k,i}$ (eq. 3.21)	$(6)M^3+(2)M^2+(2)M$
Vetor $\hat{\mathbf{x}}_{k\|k}$ (eq. 3.33)	$(2)M^2+(2)M$
Matriz $\mathbf{P}_{k\|k,i}$ (eq. 3.22)	$(4)M^3+(-1)M^2$
Matriz $\mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{I}_{M\times M}-\mathbf{K}_{k-1}\cdot\mathbf{H}^{f,T}_{k-1,n,i})$	$(4)M^3+(-1)M^2$
Matriz $\mathbf{F}^{-1}_{k-1}$	$(1)M^3+(1)M^2+(1)M$
Total:	$(4n+19)M^3+(12)M^2+(6)M$

Para facilitar a comparação entre métodos, plotou-se o número de FLOPs com relação ao atraso para a incorporação de uma única medida quando o estado possui dimensão 18. O resultado encontra-se na figura 4.1. Adicionalmente, plotou-se nas figuras 4.2, 4.3 e 4.4 gráficos 3D com número de FLOPs com relação à dimensão do vetor de estado e ao atraso para cada um dos três métodos apresentados.

Analisando os resultados, verifica-se que, para pequenos atrasos, os três métodos impõem um número parecido de FLOPs. Dessa forma, para tais cenários, convém utilizar a abordagem clássica, ou reiteração do filtro de Kalman, que assegura uma estimativa ótima. Já para atrasos grandes, o uso de tal abordagem poderá ser computacionalmente proibitiva. Então, a escolha

TABELA 4.4 – *FLOPs* necessários para o transporte de medidas fundir uma medida atrasada de n instantes de amostragem.

Cálculo	***FLOPs***	
Predição do Filtro de Kalman	$(4)M^3+(1)M^2$	
Matriz $\prod_{l=0}^{\Delta_n-1}\mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}$	$(2n-2)M^3+(1-n)M^2$	
Matriz $\mathbf{H}_{k,i}^{tm}$ (eq. 3.49)	$(2)M^3+(-1)M^2$	
Vetor $\mathbf{u}_{k,i}^{tm}$ (eq. 3.48)	$(2n+2)M^2+(-2)M$	
Vetor $\mathbf{y}_{k,i}^{tm}$ (eq. 3.46)	$(1)M$	
Matriz $\mathbf{R}_{k,i}^{tm}$ (eq. 3.56)	$(4n+4)M^3+(-n-2)M^2$	
Matriz $\prod_{t=1}^{j-1}\mathbf{F}_{k-t}$	$(2n-4)M^3+(-n+2)M^2$	$n\geq 2$
	0	$n=1$
Matriz $\mathbf{S}_{k,i}$ (eq. 3.68)	$(4n)M^3+(-n+1)M^2$	$n\geq 2$
	$(4)M^3+(-2)M^2$	$n=1$
Ganho $\mathbf{K}_{k,i}$ (eq. 3.69)	$(9)M^3+(1)M^2+(1)M$	
Vetor $\hat{\mathbf{x}}_{k\|k,i}$ (eq. 3.70)	$(4)M^2$	
Matriz $\mathbf{P}_{k\|k,i}$ (eq. 3.71)	$(4)M^3+(-1)M^2$	
Matriz $\mathbf{F}_{k-1}^{-1}$	$(1)M^3+(1)M^2+(1)M$	
Total:	$(12n+18)M^3+(-2n+9)M^2+(1)M$	$n\geq 2$
	$(32)M^3+(-2)M^2+(1)M$	$n=1$

entre a extrapolação de medidas e o transporte de medidas dependerá do problema a ser resolvido e dos recursos computacionais disponíveis, pois o segundo impõe uma carga computacional maior do que o primeiro, mas necessita de uma quantidade de memória significativamente menor.

Observe que, relembrando a análise de performance da seção 4.1, verificou-se que a abordagem clássica terá a melhor performance esperada, seguida do transporte de medidas e, por último, a extrapolação de medidas. Dessa forma, verifica-se a existência de um *trade-off* entre performance e carga computacional, o que mostra que a seleção do melhor método dependerá do tipo de aplicação.

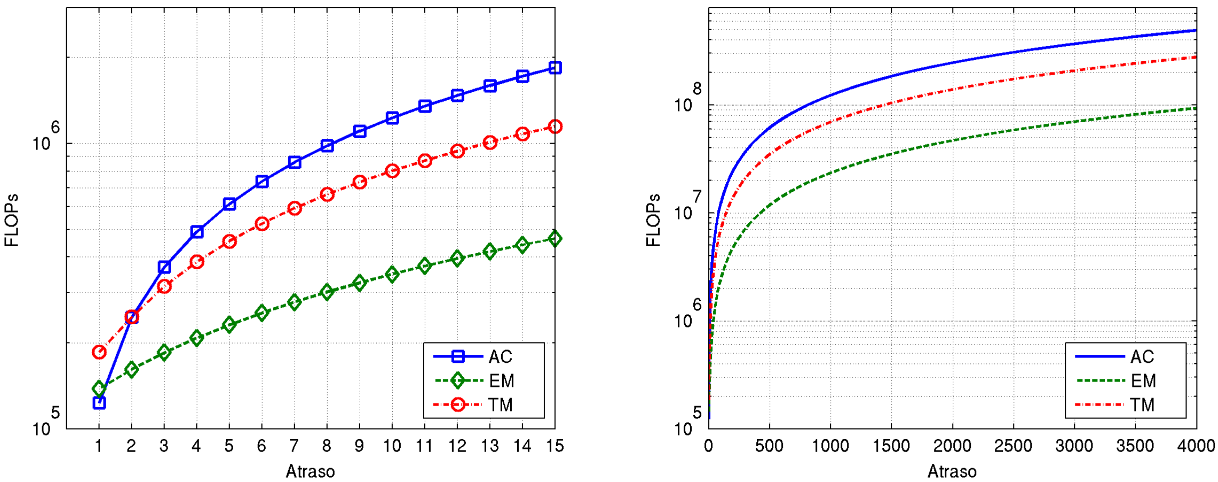

FIGURA 4.1 – FLOPs para incorporação de uma única medida atrasada quando o estado possui dimensão 18.

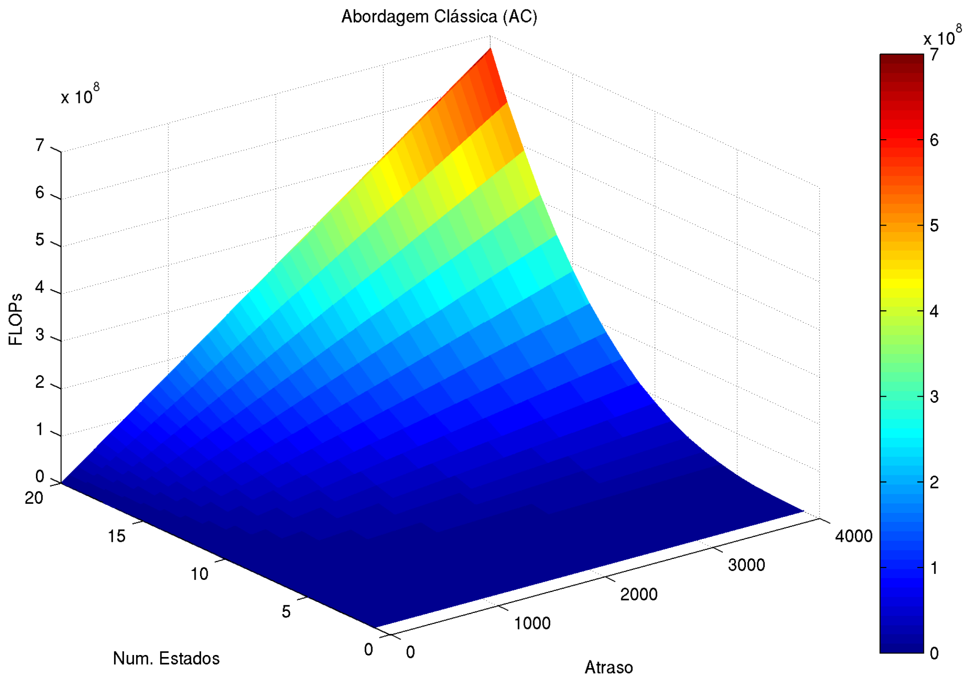

FIGURA 4.2 – FLOPs com relação à dimensão do estado e ao atraso para incorporação de uma única medida atrasada pela abordagem clássica (Reiteração do filtro de Kalman).

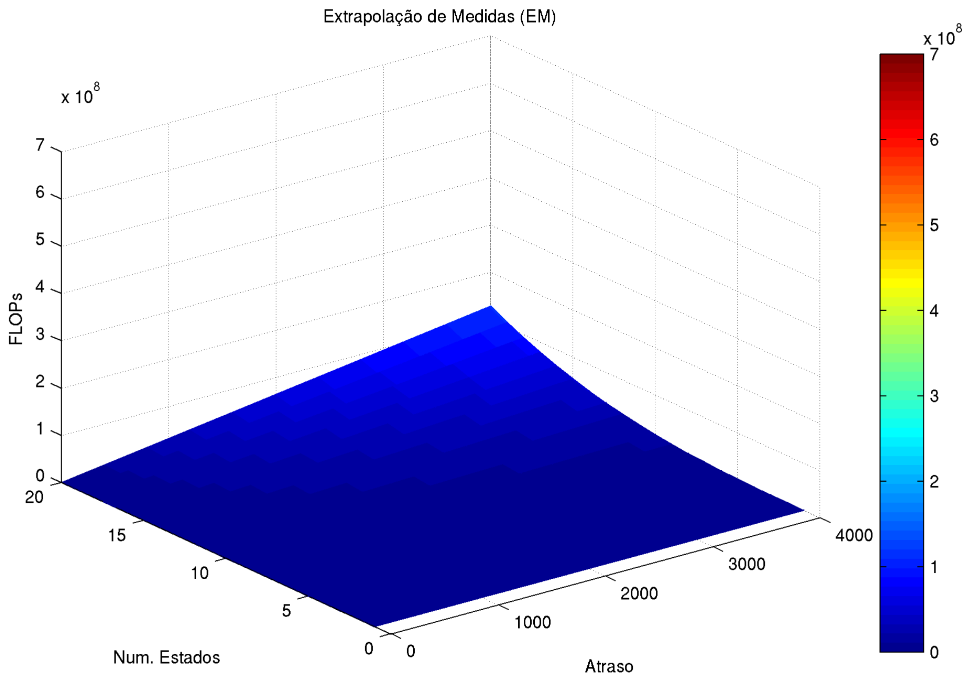

FIGURA 4.3 – FLOPs com relação à dimensão do estado e ao atraso para incorporação de uma única medida atrasada pelo algoritmo extrapolação de medidas.

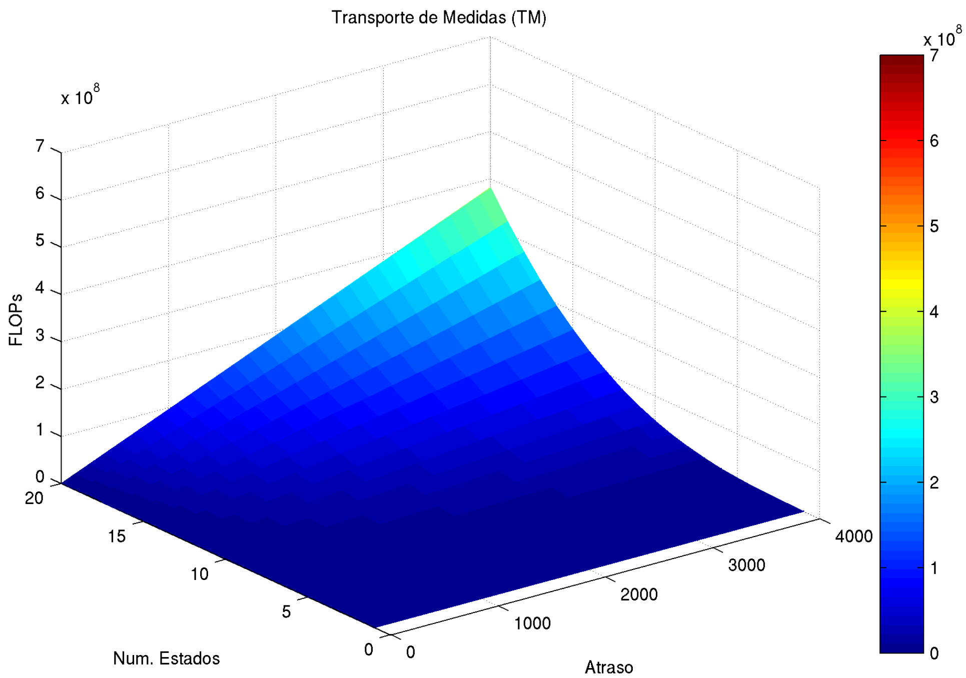

FIGURA 4.4 – FLOPs com relação à dimensão do estado e ao atraso para incorporação de uma única medida atrasada pelo algoritmo transporte de medidas.

4.4 Exemplo Numérico Simplificado

Para a comparação dos métodos, propõe-se um exemplo numérico semelhante ao apresentado em Olfati-Saber (2007), Lopes e Waldmann (2008), Chagas e Waldmann (2009) e Chagas e Waldmann (2010). Aqui, os nós compartilham o mesmo modelo dinâmico

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(1,5^\circ + \frac{k}{400}\cdot 0,5^\circ\right) & \sin\left(1,5^\circ + \frac{k}{400}\cdot 0,5^\circ\right) \\ -\sin\left(1,5^\circ + \frac{k}{400}\cdot 0,5^\circ\right) & \cos\left(1,5^\circ + \frac{k}{400}\cdot 0,5^\circ\right) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \ , \tag{4.50}$$

mas com matrizes de medição diferentes para cada i-ésimo nó

$$y_{k,i} = \begin{bmatrix} 1 + 0,5\vartheta_i & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + v_{k,i} \ , \tag{4.51}$$

onde $\mathbf{w}_{k-1}$ é o ruído de modelo com matriz de covariância $\mathbf{Q} = 10^{-3}\cdot \mathbf{I}_{2\times 2}$, $\mathbf{v}_{k,i}$ é o ruído do i-ésimo sensor da rede que apresenta variância $R_i = \mathbf{r}[i]$, onde

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 14 & 12 & 8 & 4 & 10 & 12 & 14 & 14 \end{bmatrix} , \tag{4.52}$$

e ϑ_i é uma realização de uma variável aleatória apresentando distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$. Essa variável é amostrada no início da simulação e se mantém constante em todas as realizações. Para os resultados presentes aqui, os valores obtidos para cada nó podem ser verificados na tabela 4.5.

TABELA 4.5 – Valores amostrados para a variável aleatória ϑ_i nos resultados do exemplo numérico simplificado.

Nó	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
ϑ_i	0,8148	0,9058	0,1270	0,9134	0,6324	0,0976	0,2784	0,5468

A topologia da rede pode ser vista na figura 4.5 e um exemplo de realização desse processo pode ser visto na figura 4.6. Para cada nó, a estimativa do filtro de Kalman e sua respectiva matriz de covariância foram inicializadas com

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.53}$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.54}$$

O estado inicial verdadeiro foi amostrado de uma distribuição Gaussiana com média $\mathbf{0}_{2\times 1}$ e matriz de covariância $\mathbf{P}_0$, conforme 4.54.

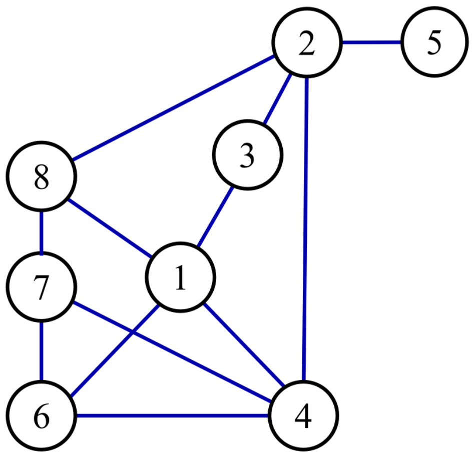

FIGURA 4.5 – Topologia da rede no exemplo da seção 4.4.

Observando a equação de medição, verifica-se que apenas um estado é medido. Logo, a princípio, deve-se verificar a observabilidade do sistema. Segundo Brammer e Siffling (1989), o sistema deve ser completamente observável se a covariância do erro de estimação convergir em todas as direções do espaço de estado independentemente do valor inicial. Embora não tenha sido buscada uma prova rigorosa da observabilidade para este sistema, o que fugiria do objetivo desse exemplo, simulou-se o sistema com um filtro de Kalman padrão utilizando vários valores diferentes para a matriz de covariância do erro de estimação inicial e verificou-se,

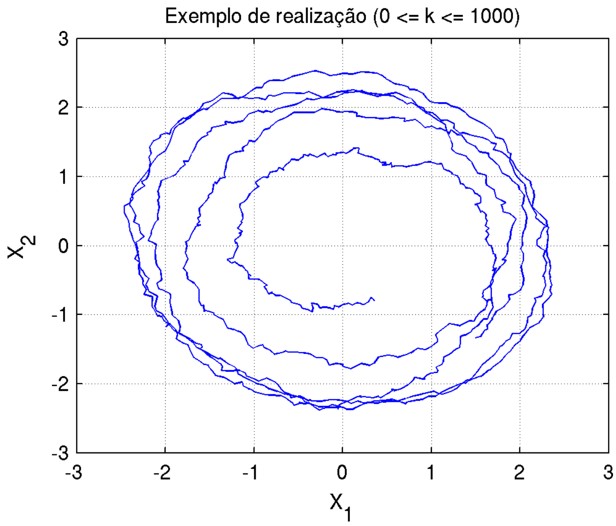

FIGURA 4.6 – Exemplo de realização no exemplo numérico da seção 4.4.

numericamente, convergência para os mesmos valores em todas as vezes. Na figura 4.7 estão expressas as variâncias computadas dos componentes do erro de estimação para um dos casos simulados. Esse resultado aponta que o sistema deve ser observável atingindo a convergência aproximadamente após a iteração de número 200.

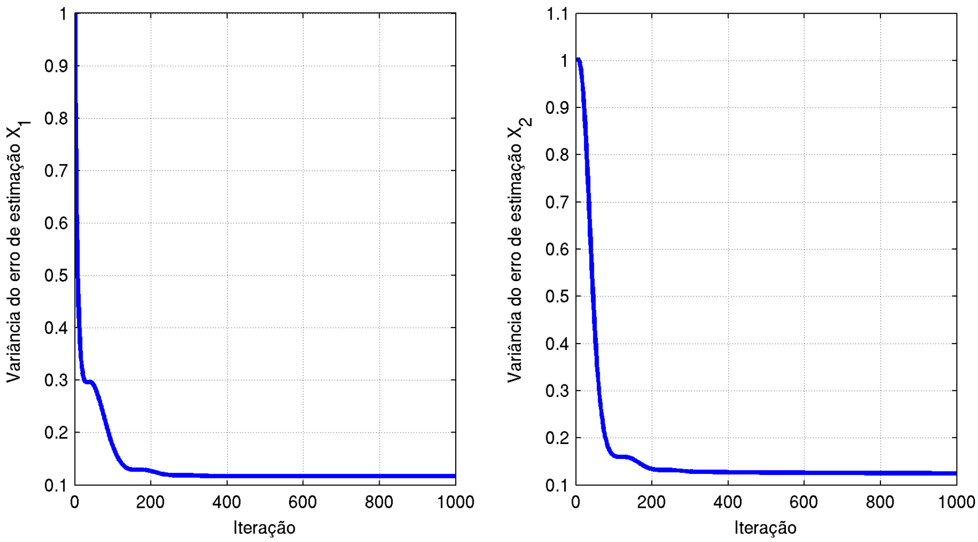

FIGURA 4.7 – Variâncias do erro de estimação de um filtro de Kalman padrão para uma realização do exemplo na seção 4.4.

Neste exemplo, os nós trocam informações conforme descrito no capítulo 2, ou seja, eles trocam o vetor de medidas transformado conforme 2.13, respectiva matriz de covariância conforme 2.14 e estampa de tempo. Quando um nó recebe uma medida do vizinho, ele a repassa para os outros, no próximo instante de amostragem, a fim de propagar a informação além da sua vizinhança. Assim, como a rede é totalmente conectada, todos os nós poderão ter acesso a todas as medidas, ainda que com atrasos. Entretanto, para que o cenário fique mais realista, adicionou-se um custo de tempo na comunicação entre os nós, que é definido como o número de instantes de amostragem que a informação irá levar para ir de um nó a outro. Com isso, propõem-se cinco cenários: no primeiro, o custo de comunicação entre dois nós vizinhos é de 8 instantes de amostragem e a fusão se dá de maneira ingênua, ou seja, desconsiderando que as medidas estão atrasadas; nos cenários 2, 3, 4 e 5 são utilizados os três algoritmos apresentados para incorporação de medidas atrasadas e o custo de comunicação foi selecionado como 1, 4, 8 e 12, respectivamente. A fusão dos vetores recebidos pela rede ocorre apenas após $k = 200$ - antes disso os nós tem acesso apenas às medidas de seus sensores locais.

Para a caracterização da qualidade da estimativa da rede, utilizou-se como figura de mérito o erro médio quadrático da rede obtido por simulação de Monte Carlo:

$$MSE(k) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} E_{i,j} \parallel \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k,i} \parallel^2 \quad . \tag{4.55}$$

Para cada instante k, a posição verdadeira do veículo é comparada com a estimativa atualizada de cada i-ésimo nó. O valor esperado da rede na j-ésima realização $E_{i,j}\{.\}$ é estimado pela média sobre os $i = [1, 2, \ldots, q]$ nós da rede. Então, o erro médio quadrático da rede é estimado pela média aritmética dessas estimativas sobre todas as $j = [1, 2, \ldots, N]$ realizações efetuadas, sendo N um número suficientemente grande. Para os resultados apresentados posteriormente, N foi escolhido como 1000 e converteu-se essa figura de mérito para a escala decibel ($10log_{10}(.)$). Concorrentemente, também foi plotado o traço da matriz de covariância do erro de estimação computada pelo nó 7 para uma realização, a fim de verificar se os métodos sub-ótimos computam valores próximos àqueles calculados pela abordagem ótima.

Os resultados dos cenários de 1 a 5 estão, respectivamente, nas figuras 4.8 a 4.12. Adicionalmente, para facilitar a visualização, plotou-se na figura 4.13 a diferença entre os erros de cada um dos métodos sub-ótimos e o erro da abordagem clássica para o cenário 05. Nessas figuras, FKL significa filtro de Kalman local, ou seja, é o resultado obtido por um filtro que estima o vetor de estado apenas com as medidas locais, que são processadas sem atrasos. Já FKD é a abreviação para filtro de Kalman distribuído, definido com o filtro que calcula, através dos algoritmos mostrados, a estimativa utilizando as medidas locais de cada nó, adquiridas sem atrasos, e a informação atrasada recebida da rede. Finalmente, FKG significa filtro de Kalman global, sendo este um filtro iterado por um nó fictício que possui acesso simultâneo a todas as medidas dos sensores da rede sem atrasos. Na figura 4.14 plotou-se uma sequência típica para os resíduos dos três métodos abordados, com suas respectivas curvas de desvio-padrão computadas (1σ e 3σ), obtidas do cenário 05. Observa-se que, neste problema, para os métodos sub-ótimos, o vetor de medidas possui dimensão variável de acordo com o atraso das medidas recebidas (vide eqs. 3.1 e 3.47). Isso, por sua vez, faz com que a dimensão do vetor de resíduo também varie. Dessa forma, na figura 4.14, está presente apenas o resíduo calculado para as medidas recebidas sem atrasos. Na tabela 4.6 está presente o custo computacional de cada algoritmo para fusão de medidas atrasadas comparado ao filtro de Kalman local (FKL).

Simulou-se também um sexto cenário comparando o método de extrapolação de medidas quando a aproximação de Larsen *et al.* (1998) em 3.10 é utilizada e, conforme mostrado, a estimativa apresenta viés com a abordagem desenvolvida neste texto que remove o viés. O cenário leva em conta a mesma configuração do cenário 05, isto é, o custo de comunicação entre os nós é definido como 12. Os resultados estão plotados na figura 4.15. Observou-se que a remoção do viés incorre em um algoritmo com carga computacional 21% maior que o algoritmo utilizando as aproximações de Larsen *et al.* (1998).

TABELA 4.6 – Carga computacional dos algoritmos para fusão de medidas atrasadas no exemplo da seção 4.4 comparada à estimativa local.

Cenário	**Custo de Comunicação**	**Método** *Carga computacional medida em relação ao filtro de Kalman local*		
		Abordagem Clássica	**Extrapolação de Medidas**	**Transporte de Medidas**
2	1	2,238	2,011	2,064
3	4	6,788	2,607	3,458
4	8	13,505	3,651	5,676
5	12	19,325	4,366	7,382

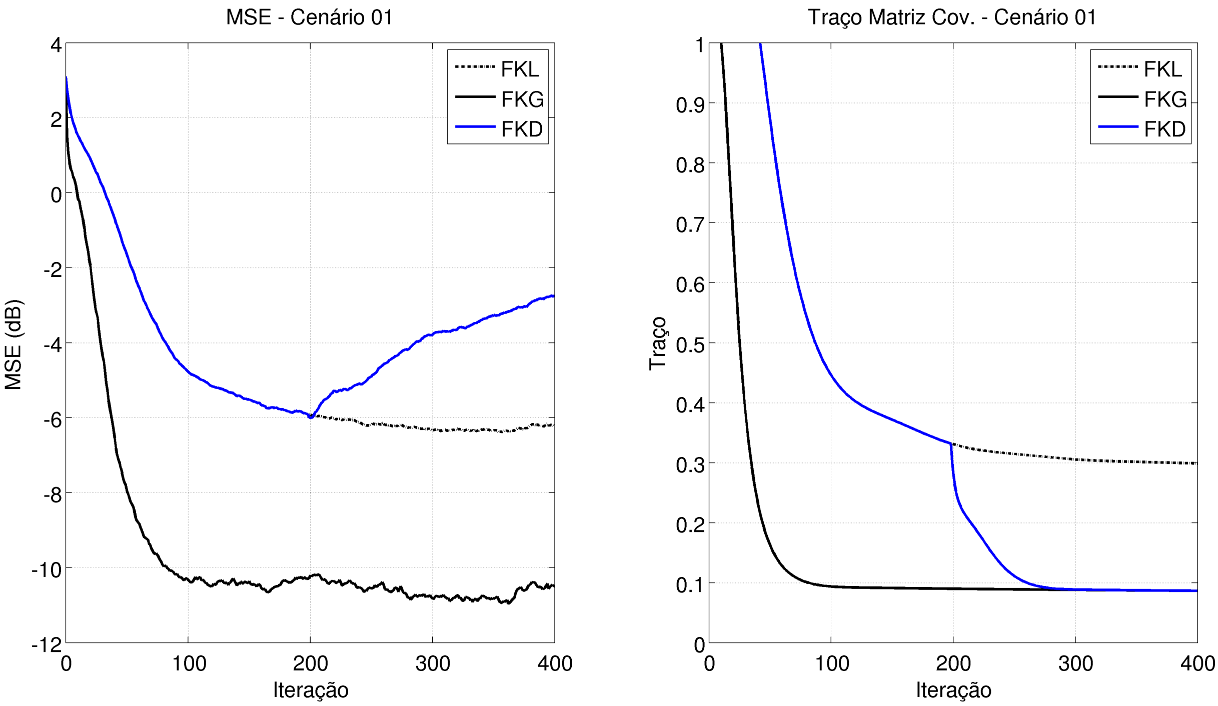

FIGURA 4.8 – Resultados para o cenário 01 - Fusão ingênua de medidas atrasadas com custo de comunicação entre nós vizinhos igual a 8.

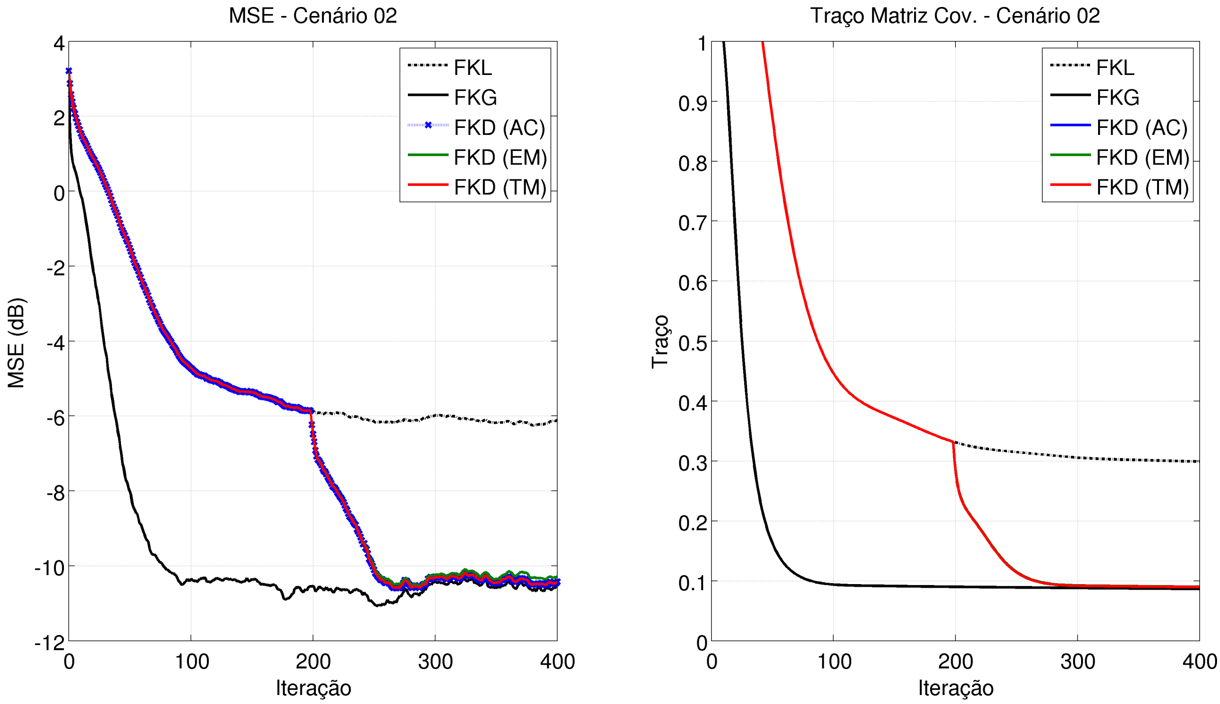

FIGURA 4.9 – Resultados para o cenário 02 - Fusão de medidas atrasadas através dos algoritmos desenvolvidos com custo de comunicação entre nós vizinhos igual a 1.

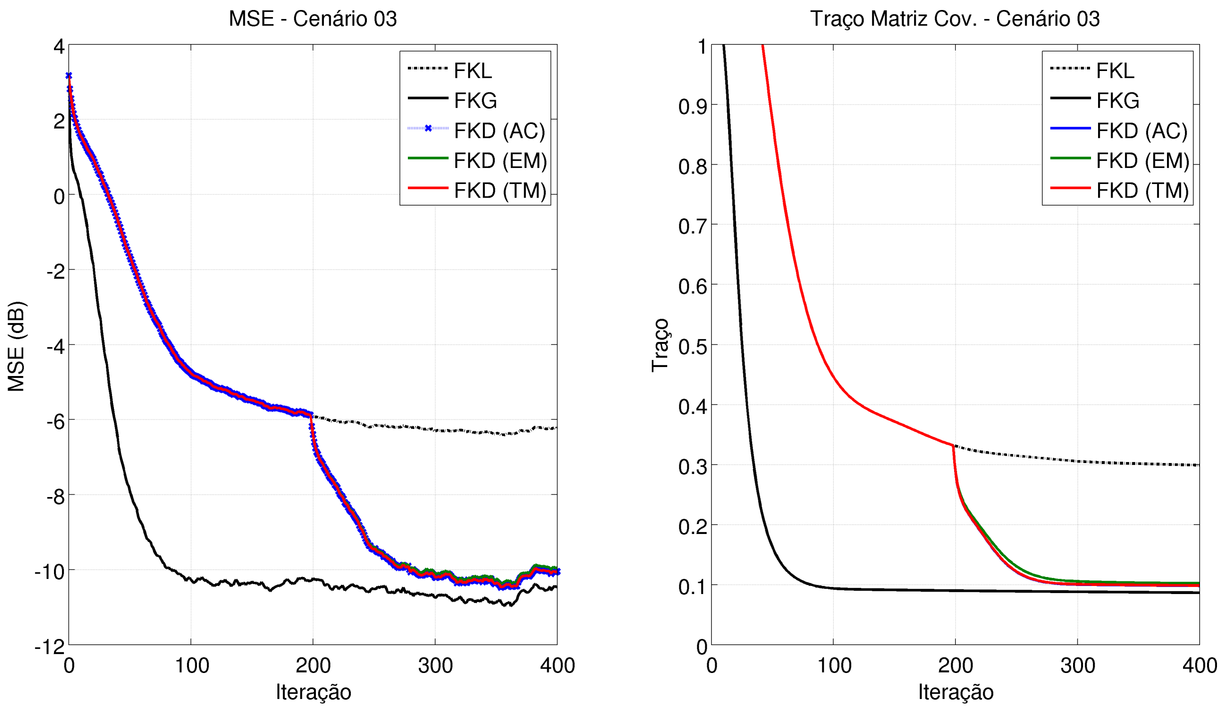

FIGURA 4.10 – Resultados para o cenário 03 - Fusão de medidas atrasadas através dos algoritmos desenvolvidos com custo de comunicação entre nós vizinhos igual a 4.

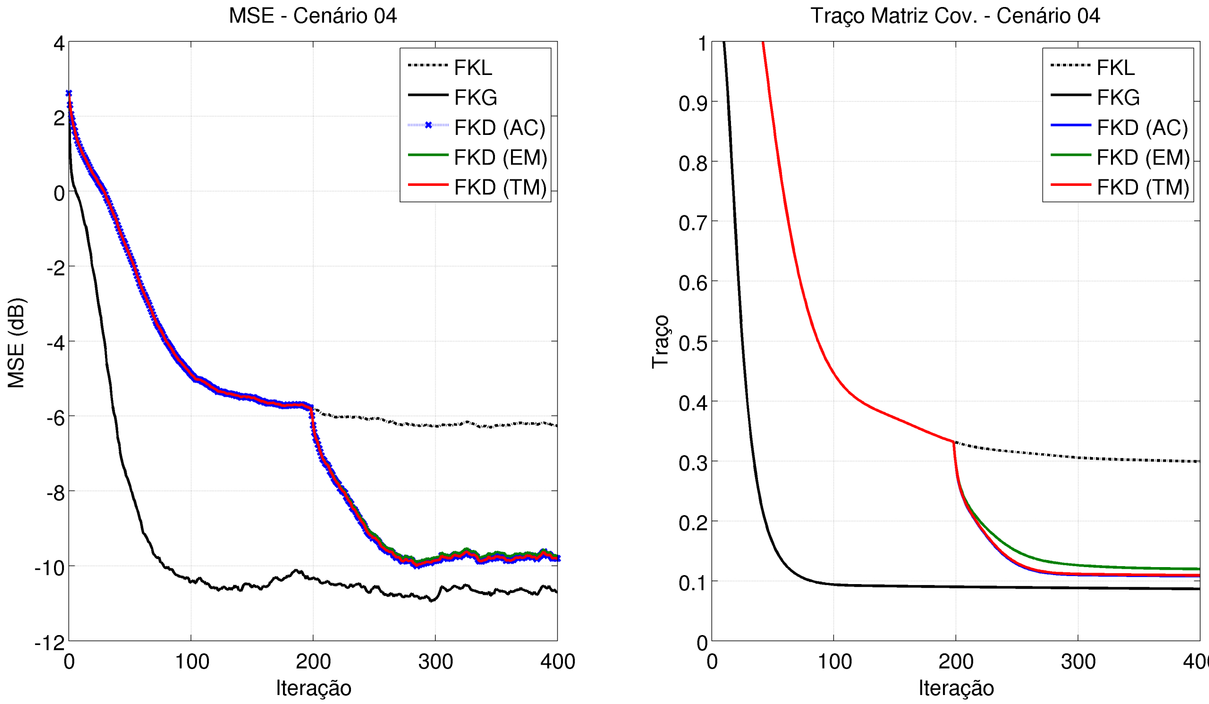

FIGURA 4.11 – Resultados para o cenário 04 - Fusão de medidas atrasadas através dos algoritmos desenvolvidos com custo de comunicação entre nós vizinhos igual a 8.

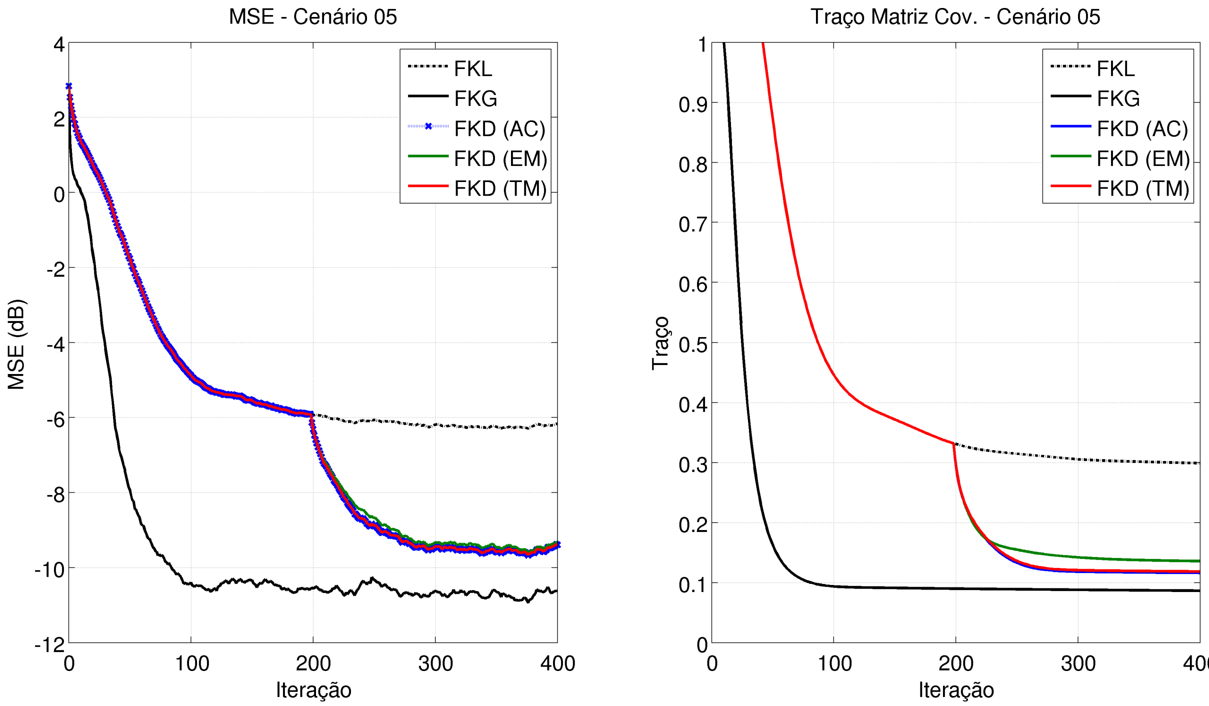

FIGURA 4.12 – Resultados para o cenário 05 - Fusão de medidas atrasadas através dos algoritmos desenvolvidos com custo de comunicação entre nós vizinhos igual a 12.

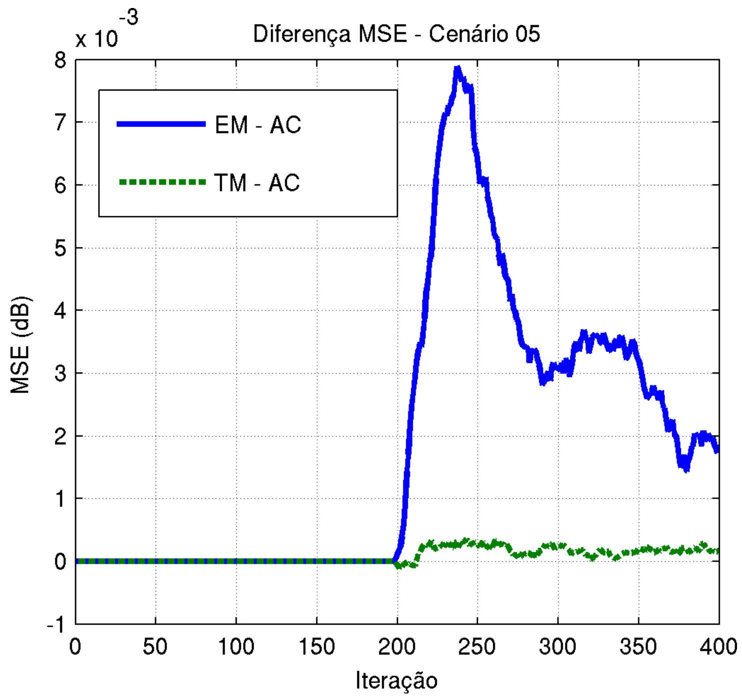

FIGURA 4.13 – Resultados para o cenário 05 - Diferença entre os erros de cada um dos métodos sub-ótimos e o erro da abordagem clássica.

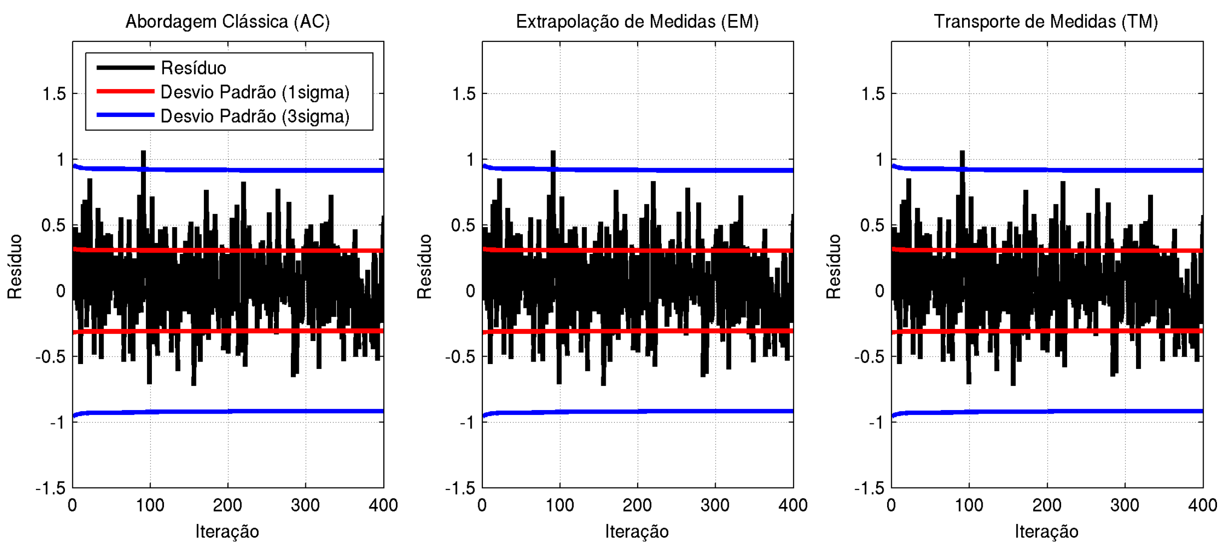

FIGURA 4.14 – Sequência de resíduos típica com respectivas curvas de desvio-padrão computadas obtidas do cenário 05.

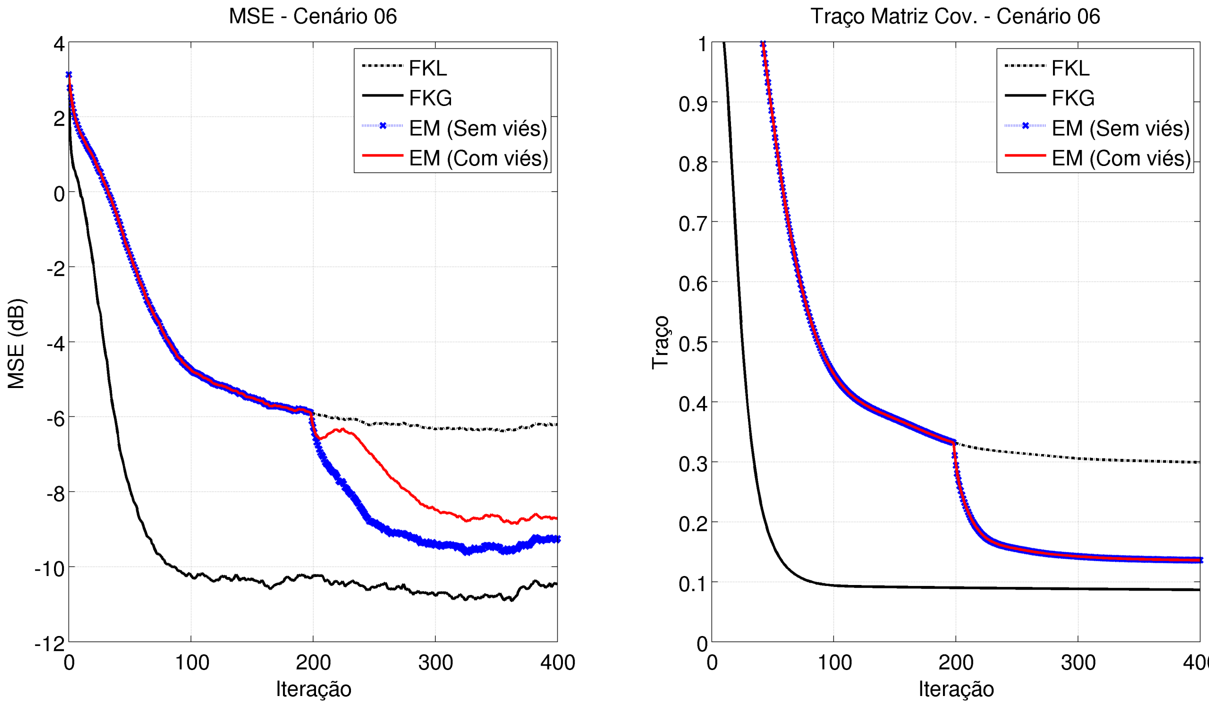

FIGURA 4.15 – Resultados para o cenário 06 - Comparação entre os métodos de extrapolação de medidas com viés e sem viés.

Observando os resultados, conclui-se que:

- A incorporação ingênua de medidas atrasadas, em alguns problemas, fará com que a estimativa da rede fique degradada, podendo levá-la à divergência.

- Observa-se que a incorporação de medidas atrasadas traz menor ganho quanto maior for o atraso. Isso pode ser verificado analisando a medida transportada em 3.42 e sua respectiva covariância em 3.53. Quanto maior o atraso, maior será o elipsoide que representa a covariância do ruído da medida transportada. Além disso, pode-se observar também que se o ruído de modelagem for maior, é esperado um menor ganho de acurácia na estimação distribuída, pois o ruído equivalente da medida transportada possuirá maior covariância.

- Conforme visto, a abordagem clássica (AC) forneceu a melhor estimativa em todos os cenários. Isso era esperado porque este método é ótimo por construção. Entretanto, a carga computacional aumenta muito conforme o atraso das medidas vai crescendo, chegando a ser proibitiva em algumas aplicações.

- Conforme visto, a abordagem clássica (AC) é, por construção, um método ótimo. Isso significa que a covariância do erro de estimação calculada neste método está coerente. Dessa forma, métodos sub-ótimos devem procurar se aproximar deste valor. Pode ser observado que o método do transporte de medidas computa um valor muito próximo do fornecido pela abordagem clássica. Já o método de extrapolação de medidas, calcula a matriz de covariância com uma diferença muito grande em comparação ao valor ótimo. Além disso, tal diferença cresce conforme o atraso aumenta. Isso é explicado devido à aproximação em 3.11.

- Embora a análise do número de operações de ponto flutuante na seção 4.3 tenha considerado a fusão de apenas uma medida e desconsiderado a carga computacional de operações como cópia de memória, observou-se resultados bastante coerentes com a carga medida pelo MATLAB. Sendo o atraso pequeno, todos os métodos produziram uma carga computacional semelhante, conforme sugere a figura 4.1. Em contrapartida, conforme o atraso cresce, verifica-se que a abordagem clássica se torna o algoritmo computacionalmente mais pesado dentre os três, seguida pelo transporte de medidas e a extrapolação de medidas.

- Em termos de acurácia da estimativa, tanto o algoritmo de extrapolação de medidas como o transporte de medidas atingiram níveis muito próximos ao ótimo, sendo o segundo ligeiramente melhor que o primeiro. Entretanto, a opção do melhor algoritmo para cada situação é relativa. A extrapolação de medidas possui carga computacional reduzida em comparação com o transporte de medidas, mas a quantidade de informações a serem armazenadas é muito mais alta, o que demonstra a existência do *trade-off* carga computacional $\times$ quantidade de memória necessária.

- Verificando a sequência de resíduos, pode-se inferir que os três métodos apresentam valores bastante próximos. Além disso, a sequência aparenta ter média zero e as estatísticas computadas apresentam coerência com o observado.

- Observando os resultados referentes ao cenário 06, observa-se que a modificação do algoritmo de extrapolação de medidas proposta aqui, para remover o viés do estimador, proporcionou um ganho significativo de acurácia. Adicionalmente, observou-se que a carga computacional adicional para a remoção do viés representou 21% da carga computacional do algoritmo sem a correção, o que indica que a nova abordagem apresenta um custo-benefício mais alto do que sem a alteração para remoção do viés.

5 Extensão dos Algoritmos para o Caso Não-Linear e para o Caso em que os Nós não Compartilham o Modelo Dinâmico

Neste capítulo está presente, na seção 5.1, uma possível extensão dos algoritmos apresentados no capítulo 3 para o caso não-linear. Adicionalmente, é mostrado na seção 5.2 uma análise para a adaptação das metodologias para o caso em que os nós da rede não compartilham o mesmo modelo dinâmico.

5.1 Extensão para o Caso Não-Linear

Conforme mencionado na seção 2.1, o cenário em que se deseja aplicar os algoritmos desenvolvidos fornece um modelo linear e Gaussiano. Entretanto, por questões de completude, será indicado nessa seção um meio para a extensão dos algoritmos para o caso não-linear.

Suponha que o modelo dinâmico do sistema seja descrito por

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} \ , \tag{5.1}$$

onde $\mathbf{f}_k$ denota uma função $\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ que descreve a dinâmica do sistema, $\mathbf{B}_k\mathbf{u}_k$ é o vetor de controle determinístico e conhecido de dimensão $M \times 1$ e $\mathbf{G}_k\mathbf{w}_k$ é uma sequência ruidosa branca de dimensão $M \times 1$ com matriz de covariância $\mathbf{Q}_k$. Esse modelo é válido para cada i-ésimo nó da rede, $i \in [1, 2, 3, \dots, q]$.

Para cada i-ésimo nó, a equação de medição é dada por

$$\mathbf{y}_{k,i} = \mathbf{h}_{k,i}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_{k,i} \ , \tag{5.2}$$

em que $\mathbf{h}_{k,i}$ é uma função $\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^{N_i}$ e $\mathbf{v}_{k,i}$ indica um ruído de medição, sendo uma sequência ruidosa branca de dimensão $N_i \times 1$ e matriz de covariância $\mathbf{R}_{k,i}$. Aqui, adota-se que o ruído de medição entre os sensores da rede são independentes entre si e também não apresentam dependência com o ruído de modelagem.

A abordagem clássica (AC) é o método que fornece a extensão mais direta. Como deve-se reiterar todo o algoritmo do filtro de Kalman, basta, ao invés de utilizar as equações usuais a cada reiteração, utilizar o equacionamento do filtro de Kalman estendido (ANDERSON; MOORE, 1979) ou do filtro de Kalman Unscented (JULIER; UHLMANN, 1997a). Entretanto, para que os algoritmos extrapolação de medidas (EM) e transporte de medidas (TM) possam ser diretamente aplicados, deve-se linearizar as equações. Para o i-ésimo nó no instante k, adotando a abordagem usual do filtro de Kalman estendido (ANDERSON; MOORE, 1979), pode-se utilizar a estimativa $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1,i}$ para linearizar a equação de modelo como

$$\mathbf{x}_k \approx \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1,i}) + \mathbf{J}_{\mathbf{f}_{k-1}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1,i})(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1,i}) + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} \ , \tag{5.3}$$

em que $\mathbf{J}_{\mathbf{f}_{k-1}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1,i}) \triangleq \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}}{\partial \mathbf{x}_{k-1}}(\mathbf{x}_{k-1})\Big|_{\mathbf{x}_{k-1}\,=\,\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1,i}}$. Na sequência, observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &\approx \underbrace{\mathbf{J}_{\mathbf{f}_{k-1}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1,i})}_{\mathbf{F}_{k-1,i}}\mathbf{x}_{k-1} + \underbrace{\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1,i}) - \mathbf{J}_{\mathbf{f}_{k-1}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1,i})\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1,i}}_{\mathbf{u}'_{k-1,i}} + \\ &+ \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}\ , \\ \mathbf{x}_k &\approx \mathbf{F}_{k-1,i}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}'_{k-1,i} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}\ , \end{aligned} \tag{5.4}$$

onde verifica-se que, com essa aproximação, se pode utilizar o algoritmo de predição usual do filtro de Kalman para gerar $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i}$.

Para todo vetor de medida recebido de um nó j qualquer, pode-se executar a sua linearização de acordo com

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}_{k-n,j} \approx \mathbf{h}_{k-n,j}(\hat{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i}) + \mathbf{J}_{\mathbf{h}_{k-n,j}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i})(\mathbf{x}_{k-n} - \hat{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i}) + \mathbf{v}_{k-n,j}\ , \\ &\underbrace{\mathbf{y}_{k-n,j} - \mathbf{h}_{k-n,j}(\hat{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i}) + \mathbf{J}_{\mathbf{h}_{k-n,j}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i})\hat{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i}}_{\mathbf{y}'_{k-n,j}} \approx \\ &\quad\approx \underbrace{\mathbf{J}_{\mathbf{h}_{k-n,j}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i})}_{\mathbf{H}^i_{k-n,j}}\mathbf{x}_{k-n} + \mathbf{v}_{k-n,j}\ , \\ &\mathbf{y}'_{k-n,j} = \mathbf{H}^i_{k-n,j}\mathbf{x}_{k-n} + \mathbf{v}_{k-n,j}\ , \end{aligned} \tag{5.5}$$

onde $\mathbf{J}_{\mathbf{h}_{k-n,j}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i}) \triangleq \frac{\partial \mathbf{h}_{k-n,j}}{\partial \mathbf{x}_{k-n}}(\mathbf{x}_{k-n})\Big|_{\mathbf{x}_{k-n}\,=\,\hat{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i}}$ e os vetores $\hat{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i}$, para $n \in [0,1,2,\cdots,max]$, devem se encontrar armazenados. Após isso, as equações desenvolvidas para os métodos de extrapolação de medidas (EM) e transporte de medidas (TM) podem ser aplicadas para executar a estimação distribuída.

Observe que este método irá prover uma estimativa aproximada e terá sua qualidade degradada dependendo do tipo de não-linearidade, principalmente se esta fornecer um sistema multimodal (RISTIC; ARULAMPALAM; GORDON, 2004). Além disso, diferentemente do caso linear, as estimativas preditas e atualizadas entre o instante atual e o instante $k - max$ deverão ser armazenadas para que seja possível linearizar as medidas para futura atualização do filtro de Kalman.

5.2 Estimação Distribuída quando os Nós não Compartilham o Modelo Dinâmico

Propõe-se, agora, verificar meios de se estender o problema de estimação distribuída com atrasos de comunicação, apresentado anteriormente, para o caso em que os nós não compartilham exatamente o mesmo modelo, mas que ou compartilham alguns componentes do vetor de estado, ou se relacionam entre si de forma conhecida. Um exemplo de cenário envolve os alinhamentos dos sistemas de navegação inercial auxiliada e respectivas calibrações de seus sensores inerciais - em voo (PARK *et al.*, 1998; ROUMELIOTIS; JOHNSON; MONTGOMERY, 2002; PARK; LEE; PARK, 2004; SALYCHEV, 2004; WALDMANN, 2007) - embarcados em VANTs que compõem uma frota voando em formação. Nesse cenário, cada VANT conta com sua unidade de navegação inercial auxiliada e os respectivos erros a estimar e, portanto, cada nó tem seu próprio modelo da dinâmica dos erros de navegação e dos erros dos sensores inerciais. Entretanto, conforme será visto no capítulo 6, verifica-se que as medidas de posição provindas, por exemplo, de dispositivos GNSS ou de câmeras em um determinado VANT podem ser utilizadas por outros VANTs na frota caso medições de suas posições relativas estejam disponíveis.

Como tentativa de se realizar estimação distribuída com nós possuindo modelos diferentes, pode-se citar o trabalho de Berg (1994). Lá, os autores abordaram um problema em que era possível encontrar uma transformação linear que relacionaria os estados entre diferentes nós, podendo, então, utilizar as técnicas de estimação distribuída convencionais. Entretanto, em alguns tipos de problema, como VANTs voando em formação e estimando seus respectivos erros de navegação e sensores inerciais, esse tipo de transformação pode ser difícil ou até impossível de se obter. Nos trabalhos de Smith e Hadaegh (2006b), Smith e Hadaegh (2006a) e Azizi e Khorasani (2009) foram propostas soluções para o problema de estimação e controle de espaçonaves onde estas trocavam informações a respeito de distâncias relativas. Lá, os autores desenvolveram filtros que concatenam os vetores de estado de todas as espaçonaves que estão no voo em formação. Embora possa ser coerente para espaçonaves sendo enviadas para o espaço profundo, no problema citado de VANTs voando em formação é muito restritivo admitir que todos os nós (VANTs) são conhecidos a fim de criar um filtro em cada nó que mantenha uma concatenação dos vetores de estados de todos os VANTs da rede. No melhor conhecimento do autor, o primeiro trabalho que propôs uma possível extensão da teoria vista anteriormente neste capítulo para o caso em que os nós não compartilham o mesmo modelo pode ser creditada a Leung, Barfoot e Liu (2010), onde analisaram a estimação decentralizada em uma rede composta por robôs que trocam informação sobre sua posição relativa. Entretanto, lá eles buscam com que cada robô atinja a estimativa centralizada, a qual é definida como a estimativa obtida quando os vetores de estado de todos os robôs são concatenados e um nó global possui acesso a todas as medidas. Dessa forma, conforme mostrado por Leung, Barfoot e Liu (2010), o algoritmo não acomoda o caso em que um robô pode falhar ou sair permanentemente da rede. Além disso, consideraram que as informações trocadas não possuem atrasos.

Partindo de uma análise Bayesiana, será visto que apenas a troca de medidas somadas a uma informação adicional que relacionará os estados dos nós são suficientes para que toda a teoria apresentada anteriormente se aplique a este problema. No entanto, a informação adicional dependerá do tipo de sistema a ser considerado, podendo, em alguns casos, não ser possível construí-la.

Nesse contexto, o modelo dinâmico em cada nó estará indexado ao seu respectivo nó. Dessa forma, o modelo matemático expresso em 2.3 deve ser modificado para

$$\mathbf{x}_{k+1,i} = \mathbf{F}_{k,i}\mathbf{x}_{k,i} + \mathbf{G}_{k,i}\mathbf{w}_{k,i} + \mathbf{B}_{k,i}\mathbf{u}_{k,i} \ , \tag{5.6}$$

em que $\mathbf{F}_{k,i}$ denota uma matriz de transição de estado $M_i \times M_i$ que descreve a dinâmica do sistema, $\mathbf{B}_{k,i}\mathbf{u}_{k,i}$ é o vetor de controle determinístico e conhecido de dimensão $M_i \times 1$ e $\mathbf{G}_{k,i}\mathbf{w}_{k,i}$ é uma sequência ruidosa branca de dimensão $M_i \times 1$ com matriz de covariância $\mathbf{Q}_{k,i}$. Adicionalmente, será considerado que os ruídos de modelagem do sistema em cada nó $(\mathbf{G}_{k,i}\mathbf{w}_{k,i})$ são independentes entre si.

Para a equação de medição, obtém-se

$$\mathbf{y}_{k,i} = \mathbf{H}_{k,i}\mathbf{x}_{k,i} + \mathbf{v}_{k,i} \ , \tag{5.7}$$

em que $\mathbf{H}_{k,i}$ é uma matriz $N_i \times M_i$ e $\mathbf{v}_{k,i}$ indica um ruído de medição, sendo uma sequência ruidosa branca de dimensão $N_i \times 1$ e matriz de covariância $\mathbf{R}_{k,i}$. Mais uma vez, os ruídos de medição entre diferentes sensores são independentes e estes são também independentes dos ruídos de modelagem em cada nó.

Como os diferentes nós apresentam diferentes vetores de estado, intuitivamente, deve-se encontrar algum tipo de relação entre os vetores de estado ou medidas entre nós distintos de tal forma que a troca de informação possibilite melhoras na estimação. Para verificar qual tipo de informação deve ser construída, será utilizada a abordagem Bayesiana.

O filtro Bayesiano ótimo é aquele que propaga a função densidade de probabilidade do vetor aleatório condicionado às medições disponíveis. Isso pode ser feito para uma cadeia de Markov de 1ª ordem através de um passo de predição

$$p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}_{0:k-1,i}) = \int_{\mathbb{R}^{M_i}} p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{x}_{k-1,i})p(\mathbf{x}_{k-1,i}|\mathbf{y}_{0:k-1,i})d\mathbf{x}_{k-1,i} \tag{5.8}$$

e outro de atualização

$$p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}_{0:k,i}) = \frac{p(\mathbf{y}_{k,i}|\mathbf{x}_{k,i})p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}_{0:k-1,i})}{p(\mathbf{y}_{k,i}|\mathbf{y}_{0:k-1,i})} = C_{k,i}p(\mathbf{y}_{k,i}|\mathbf{x}_{k,i})p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}_{0:k-1,i}) \ , \tag{5.9}$$

onde $C_{k,i}$ é uma constante que fornecerá $\int_{\mathbb{R}^{M_i}} p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}_{0:k,i})d\mathbf{x}_{k,i} = 1$ (ARULAMPALAM *et al.*, 2002).

Voltando ao problema de estimação distribuída, verificou-se no capítulo 2 que, na inexistência de atrasos na rede, em todo o instante k, o i-ésimo nó terá um subconjunto $\boldsymbol{\nu}_k^i$ do conjunto de todas as medidas geradas pela rede Ξ_k. Por ora, divide-se o conjunto de medidas em dois vetores: o vetor de medidas gerado pelo nó no instante k, chamado $\mathbf{y}_{k,i}$, e o vetor de medidas formado pela concatenação de toda a informação recebida da rede, chamado $\mathbf{y}_{k,i}^r$. Além disso, a concatenação desses dois vetores fornecerá um vetor com toda a informação disponível ao nó i no instante k, que será chamado de $\mathbf{y}_{k,i}^f$. Com isso, verificar-se-á como será o passo de atualização nesse novo cenário. Utilizando 5.9, as considerações mostradas e a lei de Bayes, obtém-se

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}_{0:k,i}^f) &= p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}_{0:k-1,i}^f,\mathbf{y}_{k,i},\mathbf{y}_{k,i}^r) = C_k p(\mathbf{y}_{k,i},\mathbf{y}_{k,i}^r|\mathbf{x}_{k,i})p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}_{0:k-1,i}^f) = \\ &= C_k p(\mathbf{y}_{k,i}^r|\mathbf{x}_{k,i},\mathbf{y}_{k,i})p(\mathbf{y}_{k,i}|\mathbf{x}_{k,i})p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}_{0:k-1,i}^f) \ , \end{aligned} \tag{5.10}$$

onde a constante C_k é calculada de forma que $\int_{\mathbb{R}^{M_i}} p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}_{0:k,i}^f)d\mathbf{x}_{k,i} = 1$.

Com isso, conclui-se que o i-ésimo nó conseguirá incorporar medidas de outros nós se for possível descrever a f.d.p. $p(\mathbf{y}^r_{k,i}|\mathbf{x}_{k,i},\mathbf{y}_{k,i})$, ou seja, será útil para estimação distribuída a incorporação da medida que concatena toda a informação recebida da rede, conforme a eq. 5.10, se for possível relacionar a referida medida concatenada com o vetor de estado do i-ésimo nó. Deve-se observar que, para criar essa relação, possivelmente os nós deverão trocar informações adicionais além de suas medidas brutas, ou seja, aquelas oriundas dos sensores sem nenhum processamento. Finalmente, os passos de predição e atualização do filtro Bayesiano para i-ésimo nó, no k-ésimo instante, para o problema de estimação distribuída em que os nós não compartilham o mesmo modelo da dinâmica do estado, pode ser descrito conforme a seguir:

$$p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}^f_{0:k-1,i}) = \int_{\mathbb{R}^{M_i}} p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{x}_{k-1,i})p(\mathbf{x}_{k-1,i}|\mathbf{y}^f_{0:k-1,i})d\mathbf{x}_{k-1,i} \ , \tag{5.11}$$

$$p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}^f_{0:k,i}) = C_k p(\mathbf{y}^r_{k,i}|\mathbf{x}_{k,i},\mathbf{y}_{k,i})p(\mathbf{y}_{k,i}|\mathbf{x}_{k,i})p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}^f_{0:k-1,i}) \ . \tag{5.12}$$

Uma maneira para descrever a f.d.p. $p(\mathbf{y}^r_{k,i}|\mathbf{x}_{k,i},\mathbf{y}_{k,i})$ necessária para a fusão distribuída é encontrar uma função que relacione $\mathbf{y}^r_{k,i}$ com $\mathbf{x}_{k,i}$, ou seja,

$$\mathbf{y}^r_{k,i} = \mathbf{h}^r_k(\mathbf{x}_{k,i}) \ . \tag{5.13}$$

Considerando isso, verifica-se que o problema de estimação distribuída no qual os nós possuem diferentes modelos se resume a processar a medida recebida pela rede para que se transforme em uma pseudomedida do estado do nó. Feito isso e encontrando a f.d.p. $p(\mathbf{y}^r_{k,i}|\mathbf{x}_{k,i},\mathbf{y}_{k,i})$, pode-se estimar o estado utilizando, por exemplo, a média da f.d.p. *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{y}^f_{0:k,i})$ e obter, assim, a estimativa global de mínimo erro médio quadrático.

Outra forma de descrever a f.d.p. $p(\mathbf{y}^r_{k,i}|\mathbf{x}_{k,i},\mathbf{y}_{k,i})$ seria encontrar uma relação entre os estados dos nós. Por exemplo, se fosse encontrada uma relação entre o estado do nó i e do nó j no instante k

$$\mathbf{x}_{k,j} = \mathbf{f}_k^{j\to i}(\mathbf{x}_{k,i}) \ , \tag{5.14}$$

então a equação de medição no nó j pode ser reescrita como

$$\mathbf{y}_{k,j} = \mathbf{H}_{k,j}\mathbf{x}_{k,j} + \mathbf{v}_{k,j} = \mathbf{H}_{k,j}\mathbf{f}_k^{j\to i}(\mathbf{x}_{k,i}) + \mathbf{v}_{k,j} \ . \tag{5.15}$$

Essa é a abordagem brevemente comentada no trabalho de Berg (1994), onde os autores consideraram que a função $\mathbf{f}_k^{i\to j}(.)$ era linear.

A transformação da medida oriunda da rede para se tornar uma pseudomedida do vetor de estado no nó, conforme 5.13, irá depender do respectivo modelo e dos sensores. Em alguns casos, a relação encontrada poderá ser não linear e não Gaussiana mesmo se o sistema de ambos os nós forem lineares e Gaussianos, necessitando a aplicação de algoritmos de filtragem não-lineares, como o filtro de Kalman Estendido ou Unscented. Além disso, pode-se também necessitar de medidas adicionais que possibilitem encontrar uma relação entre os estados dos dois nós. Por exemplo, em um problema onde robôs estão se locomovendo por uma sala, uma medida de posição de um determinado robô poderia ser utilizada por qualquer outro se existisse uma medição da posição relativa entre eles dois (LEUNG; BARFOOT; LIU, 2010).

Finalmente, verifica-se que no caso em que diferentes nós possuem diferentes modelos dinâmicos, uma medida de um determinado nó poderá ser utilizada por outro se for possível construir uma das relações expressas em 5.13 ou 5.14. Se tais relações forem não lineares, basta, por exemplo, linearizá-las em torno de $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i}$ ou $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1,i}$, respectivamente, conforme o algoritmo usual do filtro de Kalman estendido. Dessa forma, é possível relacionar a medida da vizinhança com o estado local de cada nó de forma a produzir uma pseudomedida do estado local. Isto, por sua vez, permite a utilização dos algoritmos mostrados anteriormente para fusão de informações em sistemas distribuídos quando os nós não compartilham o mesmo modelo, inclusive quando existirem atrasos de comunicação.

6 Estimação Distribuída de Erros em Navegação Inercial Auxiliada

6.1 Sistemas de Navegação

A navegação inercial utiliza um aparato chamado de sistema de navegação inercial, ou INS em inglês. Esse sistema emprega uma tríade de girômetros e outra de acelerômetros, que são integrados em uma IMU (unidade de medição inercial, em inglês), que afere grandezas inerciais, a saber, velocidade angular e força específica. Através desses dados, uma unidade de processamento pode computar variáveis de interesse para que se possa realizar a navegação. Essa variáveis, de maneira geral, são: posição, velocidade e atitude do veículo com relação a um sistema de referência conhecido. Existe uma literatura vasta sobre navegação inercial e os conceitos básicos não serão abordados aqui, apenas alguns detalhes necessários para o entendimento dos resultados. Para maiores informações, pode-se consultar, por exemplo, Bar-Itzhack (1977), Bar-Itzhack (1978), Weinred e Bar-Itzhack (1979), Bar-Itzhack e Berman (1988), Bar-Itzhack (1988), Savage (1998a), Savage (1998b), Goshen-Meskin e Bar-Itzhack (1992c), Salychev (2004), Waldmann (2007) e Campos (2011).

6.2 Definição de sistemas de referência

Inicialmente, deve-se definir os sistemas de coordenadas que serão utilizados ao longo do texto. Estes sistemas são bastantes conhecidos na literatura e estão aqui presentes por questões de completude. Para maiores informações, consulte, por exemplo, Salychev (2004).

Para uma melhor visualização, verifique a figura 6.1 com a representação em duas dimensões de alguns dos sistemas de referência que serão mencionados a seguir.

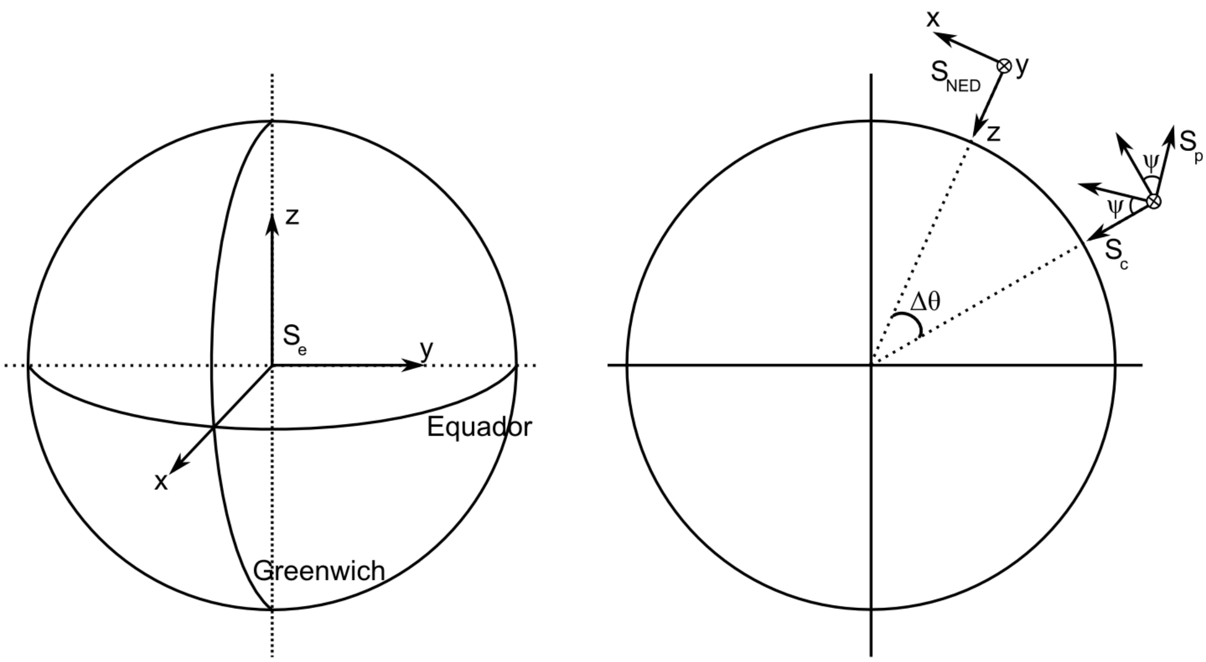

FIGURA 6.1 – Representação dos sistemas de referência fixo à Terra, local, da plataforma e computado.

6.2.1 Sistema fixo à Terra - ECEF (S_e)

Este sistema está fixo à Terra. Possui eixo **x** apontando para as coordenadas 0° de latitude e 0° de longitude, eixo **z** alinhado com o eixo de rotação da Terra e orientado para o polo Norte e eixo **y** completando o sistema dextrogiro.

6.2.2 Sistema local - NED (S_l)

O sistema local é utilizado para o cálculo das grandezas necessárias para a solução do problema de navegação. Neste texto, utilizar-se-á o sistema da horizontal local NED (***N**orth, **E**ast, **D**own*). Este é definido como um sistema que, na posição onde a aeronave se encontra, possui eixo **x** apontando para o norte geográfico local, eixo **y** apontando para o leste e eixo **z** orientado para baixo, na direção do centro da Terra.

6.2.3 Sistema da plataforma (S_p) e Sistema computado (S_c)

O sistema da plataforma é o sistema oriundo da solução do algoritmo de navegação. É o que o INS computa como sendo o sistema local.

Segundo o modelo de Pinson (1963), válido para erros com magnitude pequena, existem duas fontes de erros independentes no cálculo do sistema da plataforma. O primeiro é causado pela diferença entre o posicionamento verdadeiro do veículo na Terra e o que o INS computa ($\Delta\boldsymbol{\theta}$). Já o segundo é causado pelo desalinhamento entre o sistema local na posição computada pelo INS e o sistema da plataforma ($\boldsymbol{\psi}$). Dessa forma, o ângulo entre o sistema local (S_l) e o sistema da plataforma (S_p) pode ser aproximado por $\boldsymbol{\phi} = \Delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\psi}$.

O sistema computado é definido como o sistema local na posição fornecida pelo INS. Dessa forma, a diferença entre o sistema computado e o sistema local se dá apenas pelo erro de posicionamento, descrito através do ângulo $\Delta\boldsymbol{\theta}$.

Para esses pequenos ângulos, a matriz de cossenos diretores (DCM, em inglês) que leva o sistema o sistema local para o sistema computado pode ser descrita como (PINSON, 1963)

$$\mathbf{D}_c^l = \mathbf{I}_{3\times 3} - [\Delta\boldsymbol{\theta}]_\times \ , \qquad (6.1)$$

onde $[\Delta\boldsymbol{\theta}]_\times$ é a matriz anti-simétrica que representa o produto vetorial do vetor $\Delta\boldsymbol{\theta}$ com outro vetor qualquer ($[\Delta\boldsymbol{\theta}]_\times \mathbf{y} = \Delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$). Já a DCM que leva o sistema computado para o sistema da plataforma, pode ser descrita como (PINSON, 1963)

$$\mathbf{D}_p^c = \mathbf{I}_{3\times 3} - [\psi]_\times \ . \tag{6.2}$$

6.2.4 Sistema do corpo (S_b)

Este é o sistema que está fixo ao corpo da aeronave. Em aviões, costuma possuir eixo **x** ao longo da aeronave apontando para frente, eixo **z** para baixo e eixo **y** completando o sistema dextrogiro. Aqui, por questões de simplificação e sem perda de generalidade, será considerado que o sistema do corpo está alinhado com o sistema dos sensores. Em outras palavras, será considerado que os sensores inerciais medem suas grandezas no sistema do corpo.

6.3 Sistemas com plataforma estabilizada e solidários (*strap-down*)

Existem duas maneiras de se montar a unidade inercial na aeronave: sob uma plataforma estabilizada ou de forma solidária. Uma breve introdução sobre esses sistemas será apresentada a seguir.

O primeiro tipo consiste em montar a unidade inercial sobre uma plataforma munida de um sistema de gimbals com sensores angulares e motores capazes de alterar a sua atitude. Estes são controlados para mantê-la alinhada com o sistema de referência local (S_l). De forma simplificada, utilizam-se informações dos girômetros e acelerômetros para compensar qualquer mudança de atitude e posição da aeronave e fazer a plataforma manter a sua atitude alinhada com o sistema de referência local. Dessa forma, a obtenção da atitude da aeronave com relação a esse sistema é feita apenas lendo os dados dos sensores angulares dos gimbals.

O segundo tipo, chamado também de solidário (*strapdown*), consiste em montar a unidade inercial de forma solidária ao corpo. Assim, após um processo de calibração, ela fica sempre alinhada com o sistema do corpo (S_b). Dessa forma, os dados provenientes dos girômetros e acelerômetros são processados por uma unidade computacional para estimar as variáveis de navegação, ou seja, nesse caso a plataforma é criada de forma computacional.

O primeiro tipo foi muito utilizado no início da era da navegação inercial. Entretanto, a montagem eletromecânica e o sistema de controle é deverás complicado e com o aumento da capacidade computacional nas últimas décadas os sistemas *strapdown* se tornaram predominantes. Devido a isso, os resultados desenvolvidos posteriormente são baseados na montagem solidária ao corpo.

6.4 Algoritmo de solução

Para a solução do problema de navegação, deseja-se obter três dados básicos: posição, velocidade e atitude do veículo com relação ao sistema local (BAR-ITZHACK, 1977; SAVAGE, 1998a; SAVAGE, 1998b; SALYCHEV, 2004). Basicamente, deseja-se conhecer qual é o sistema local e como este se relaciona com o sistema do corpo. Por isso, toda unidade de navegação inercial necessita da iteração de um algoritmo que realizará a solução do problema. Este algoritmo é responsável por obter dos girômetros e acelerômetros, respectivamente, incrementos de ângulo e de velocidade linear desde a última amostragem até o presente (SALYCHEV, 2004). De posse desses dados e dos valores calculados no instante de amostragem anterior, o algoritmo provê o cálculo dos novos valores do problema de navegação.

Existem na literatura vários algoritmos para completar essa tarefa, como, por exemplo, Bar-Itzhack (1977), Bar-Itzhack (1978), Savage (1998a) e Savage (1998b). Entretanto, o estudo de suas características particulares não será feito aqui. Uma comparação entre várias metodologias pode ser vista em Campos (2011). Nas simulações posteriores, foi utilizado o algoritmo apresentado em Salychev (2004).

6.5 Modelo de Erros do Sistema de Navegação

Conforme mencionado, o algoritmo de solução de navegação inercial utiliza dados dos sensores inerciais. Estes sensores possuem diversos tipos de erros e, com frequência, são representados por erros equivalentes caracterizados como erros de zero aditivamente combinados com ruído branco (BAR-ITZHACK; BERMAN, 1988; GOSHEN-MESKIN; BAR-ITZHACK, 1992b; LEE; PARK; PARK, 1993; CHUNG; PARK; LEE, 1995; RHEE; ABDEL-HAFEZ; SPEYER, 2004; SALYCHEV, 2004; HONG *et al.*, 2005; LEE *et al.*, 2005; TANG *et al.*, 2009). Esses erros são chamados de *bias* para os acelerômetros e deriva (*drift*) para os girômetros. Tais imperfeições fazem com que a solução do algoritmo de navegação divirja com o tempo (SALYCHEV, 2004).

Em aplicações civis, é bastante comum que os sensores inerciais possuam erros demasiadamente grandes. Dessa forma, a solução do problema de navegação pelo algoritmo empregado em sua solução apresenta, em pouco tempo de operação, erros excessivos (CHAGAS; WALDMANN, 2012a). Isso impossibilitaria a navegação em praticamente todas as operações práticas. Então, para limitar os erros, são utilizados sensores adicionais que não são baseados em princípios inerciais para corrigir a solução do INS. Exemplos de sensores não-inerciais são: GNSS, magnetômetro e câmera.

Para a utilização dos sensores não-inerciais, é usual empregar um modelo de erros que é obtido linearizando a dinâmica dos erros em torno da solução de navegação do INS. Esse modelo, usualmente, é composto de 15 estados (BAR-ITZHACK; BERMAN, 1988):

- **Erros de posição** ($\Delta\mathbf{R}_l$): três componentes do erro de posição descrito no sistema local (S_l);
- **Erro de velocidade** ($\Delta\mathbf{V}_l$): três componentes do erro de velocidade descrito no sistema local (S_l);
- **Desalinhamento** (ψ): três componentes do vetor de rotação que transforma o sistema da plataforma (S_p) no sistema computado (S_c);
- **Bias** ($\boldsymbol{\nabla}$): três componentes do *bias* da tríade de acelerômetros, cada um modelado como uma constante aleatória;
- **Deriva** (ϵ): três componentes da deriva da tríade de girômetros, cada um modelado como uma constante aleatória.

O modelo de erros do INS é diferente para os casos de IMU com plataforma estabilizada e IMU *strapdown*. Isso ocorre porque, no primeiro, o *bias* e a deriva estão, aproximadamente, constantes quando representados no sistema local (NED). Já no segundo, estes componentes são considerados constantes quando representadas no sistema do corpo (WEINRED; BAR-ITZHACK, 1979). Para sistemas com IMU solidária ao corpo, o modelo de erros, desconsiderando nessa etapa as incertezas aleatórias, é (SALYCHEV, 2004; WALDMANN, 2007)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \,,$$
$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} [\rho_l]_\times & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{g}_e & [\rho_l + 2\Omega_{e,l}]_\times & [\mathbf{Asp}_l]_\times & \mathbf{D}_l^b & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & [\rho_l + \Omega_{e,l}]_\times & \mathbf{0}_{3\times3} & -\mathbf{D}_l^b \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{array}\right] , \tag{6.3}$$

onde

- $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{R}_l^T & \Delta\mathbf{V}_l^T & \psi^T & \nabla_b^T & \epsilon_b^T \end{bmatrix}^T ,$
- $\rho_l \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{V_E}{R_E + h} & -\dfrac{V_N}{R_N + h} & -\dfrac{V_E \cdot \tan(\lambda)}{R_E + h} \end{bmatrix}^T ,$
- $\Omega_{e,l} \triangleq \begin{bmatrix} \Omega_e \cdot \cos(\lambda) & 0 & -\Omega_e \cdot \sin(\lambda) \end{bmatrix}^T ,$
- $\mathbf{g}_e \triangleq diag\left(-\dfrac{g_e}{R_e} \quad -\dfrac{g_e}{R_e} \quad \dfrac{2 \cdot g_e}{R_e} \right) ,$

em que V_N e V_E são, respectivamente, a velocidade do veículo nas direções norte e leste; h é a altitude do veículo; e λ é a latitude em que o veículo se encontra. As definições dos demais símbolos podem ser encontradas na Lista de Símbolos.

Adicionalmente, será incorporado ao vetor de estado o *bias* do magnetômetro, modelado como um vetor constante quando representado no sistema do corpo (CHAGAS; WALDMANN, 2012c)

$$\dot{\delta}_b = \mathbf{0}_{3\times1} \,, \tag{6.4}$$

o que fornecerá o modelo de erros estendido

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{A}_e \cdot \mathbf{x}_e = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{15\times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{3\times 15} & \mathbf{0}_{3\times 3} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \hline \delta_b \end{array}\right] . \tag{6.5}$$

6.6 Navegação Inercial Auxiliada

Dado o exposto, pode-se verificar como se dá o funcionamento da navegação inercial auxiliada. Um fluxograma simplificado está mostrado na figura 6.2. A IMU provê, em sua saída, incrementos de velocidade linear originados pela força específica e incrementos de ângulo relacionados à velocidade angular do veículo. O INS, por sua vez, processa essas grandezas para fornecer a solução do problema de navegação, ou seja, para calcular a posição, a velocidade e a atitude do veículo em relação ao sistema local. Entretanto, os erros da IMU fazem com que a solução de navegação seja divergente (SALYCHEV, 2004). Dessa forma, constrói-se um modelo linearizando a dinâmica dos erros em torno da solução de navegação e, com o auxilio de sensores não-inerciais, um filtro de Kalman estendido é responsável por estimar os erros de navegação (BAR-ITZHACK; BERMAN, 1988; WEINRED; BAR-ITZHACK, 1979). Quando o filtro converge, essas estimativas são utilizadas para corrigir a solução provinda do INS. Adicionalmente, convém retornar para o INS as estimativas dos erros e calibrar os sensores inerciais tentando remover o *bias* e a deriva (WALDMANN, 2007). Esse processo é chamado de *reset* do INS e é utilizado para produzir uma solução mais acurada e evitar que a linearização do modelo de erros seja em torno da solução em malha aberta do INS, o que degrada o processo de estimação (WALDMANN, 2007). Deve-se observar que, quando o *reset* é feito, é necessário remover os valores corrigidos da média do filtro de Kalman (WALDMANN, 2007). Em geral, basta zerar os componentes no vetor de estado atualizado que foram utilizadas para corrigir o

INS. Para maiores informações, consulte, por exemplo, Salychev (2004) ou Waldmann (2007).

Existem vários tipos de sensores não-inerciais que podem ser utilizados. A seguir, estão detalhados os dois tipos que foram utilizados nas simulações neste trabalho: receptores GNSS e magnetômetros. Entretanto, outras possibilidades são altímetros, câmeras, sensores Doppler, entre outros.

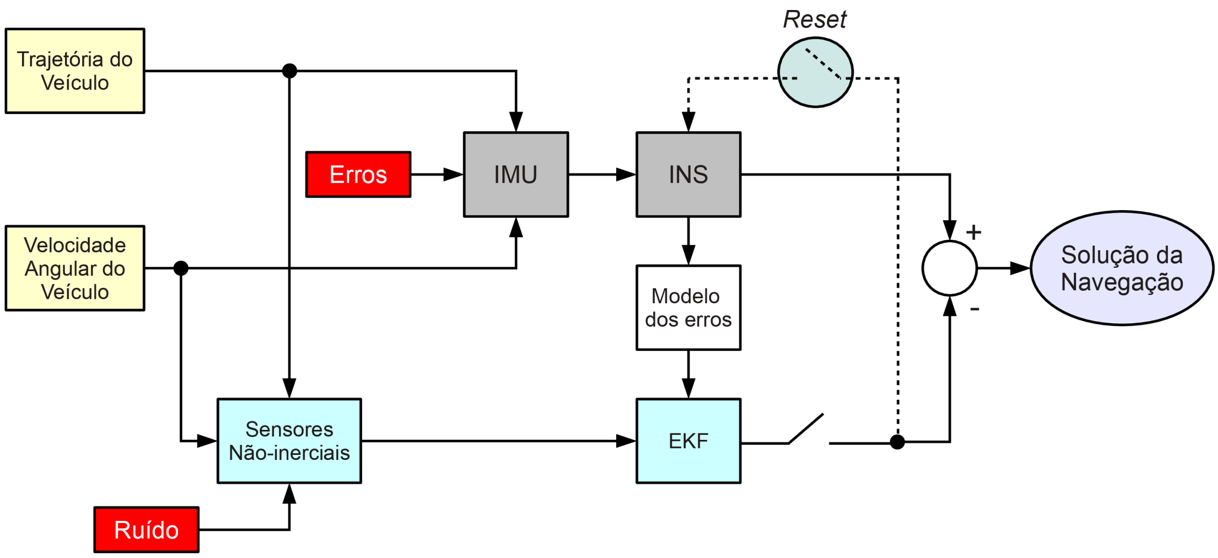

FIGURA 6.2 – Fluxograma de operação do sistema de navegação inercial auxiliada.

6.7 Sensores Auxiliares

Nesta seção estão presentes os modelos matemáticos de dois tipos de sensores que foram utilizados para auxiliar o INS nas simulações, a saber, sensor baseado em GNSS e magnetômetro.

6.7.1 GNSS

Sensores GNSS utilizam sinais provindos de satélites para, nas aplicações mais usuais, fornecer localização e velocidade de um veículo na Terra. Para que isso seja possível, são condições necessárias que o receptor tenha uma antena adequada à recepção dos sinais GNSS e acesso aos sinais provindos de, no mínimo, 4 satélites. Existem diversos pormenores que devem ser considerados na construção de um receptor. Para maiores informações, pode-se consultar Farrell e Barth (1998). Aqui será considerado que os pormenores foram contornados e que o receptor GNSS sempre possui acesso a uma quantidade de satélites que possibilite a medição da posição $\mathbf{p}_{k,e}^{GNSS}$ e da velocidade $\mathbf{v}_{k,e}^{GNSS}$ do veículo no sistema fixo à Terra. Caso esta consideração não seja verdade, as medidas fornecidas pelo receptor GNSS poderão depender do seu erro de relógio e de sua deriva (FARRELL; BARTH, 1998). Então, caso medidas nesta condição sejam transmitidas para outras aeronaves, cada nó deverá estimar o erro de relógio e sua respectiva deriva dos receptores instalados nos outros VANTs a fim de utilizar a informação recebida para atualizar o seu filtro. Tal complicação deixará o problema intratável do ponto de vista prático. Dessa forma, se faz a suposição mencionada e, neste caso, a equação para atualização do modelo de erros é feita de acordo com (CHAGAS; WALDMANN, 2012b)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_k^{GNSS} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{l,k}^{e}(\mathbf{p}_{k,e}^{GNSS} - \mathbf{p}_{k,e}^{INS}) \\ \mathbf{D}_{l,k}^{e}(\mathbf{v}_{k,e}^{GNSS} - \mathbf{v}_{k,e}^{INS}) \end{bmatrix}, \\
\mathbf{y}_k^{GNSS} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{e,k} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{l,k}^{e} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{D}_{l,k}^{e} \end{bmatrix} \mathbf{v}_k^{GNSS},
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

onde $\mathbf{v}_k^{GNSS}$ é o ruído de medição e $\mathbf{p}_{k,e}^{INS}$ e $\mathbf{v}_{k,e}^{INS}$ são, respectivamente, a posição e velocidade do veículo calculadas pela INS e representadas no sistema fixo à Terra, onde considera-se o elipsoide de interpolação WGS-84 para modelagem da geóide. Observe que a matriz $\mathbf{D}_{l,k}^{e}$, que é a DCM que transforma o sistema de coordenadas fixo à Terra no sistema de coordenadas local no instante k, pode ser calculada utilizando os dados do receptor GNSS ou os dados da solução do INS.

Devido a diversos fatores como a propagação das ondas dos satélites através da ionosfera e o processo de filtragem realizado pelo receptor, o ruído $\mathbf{v}_k^{GNSS}$ não será branco. Entretanto, se a taxa de amostragem do receptor GNSS for de 1 Hz, então se pode desprezar a correlação temporal nesta sequência de ruídos (BORRE; TIBERIUS, 2000). Dessa forma, será considerado que $\mathbf{v}_k^{GNSS}$ é uma sequência ruidosa branca e Gaussiana com matriz de covariância $\mathbf{R}_k^{GNSS}$ e média $\mathbf{0}_{6\times 1}$.

Este tipo de abordagem é chamada de fracamente acoplada (*loosely coupled*), quando se utiliza os dados processados do GNSS para limitar os erros de navegação. Em contrapartida, um meio mais robusto seria utilizar diretamente os dados oriundos do receptor, a saber, pseudodistâncias entre o receptor e cada satélite e desvio Doppler ao longo da linha de visada, para atualizar o filtro de Kalman do INS. Essa abordagem, por sua vez, é chamada de fortemente acoplada (*tightly coupled*). Hjortsmarker (2005) comparou a estimação entre as duas abordagens e verificou que, se o receptor tem acesso a uma quantidade mínima de satélites de tal forma que consiga sempre fornecer as estimativas de posição e velocidade na abordagem fracamente acoplada, então ambos os métodos são equivalentes. Diferenças são vistas quando o número de satélites rastreados pelo receptor cai e as estimativas de posição e velocidade não podem ser computadas.

6.7.2 Magnetômetro

O magnetômetro é um dispositivo que consegue medir os três componentes do vetor do campo geomagnético. Foi considerado que o magnetômetro fornece medidas no sistema da plataforma em INS com plataforma estabilizada ou no sistema do corpo no caso *strapdown*. Entretanto, o modelo aqui definido é válido independentemente do tipo de IMU utilizada. Sendo $\mathbf{B}_{l,k}$ o vetor do campo geomagnético descrito no sistema local no instante k, pode-se escrever que a medida do magnetômetro para o mesmo instante é dada por

$$\mathbf{B}_{mag,k} = \mathbf{D}^{l}_{b,k}\mathbf{B}_{l,k} + \mathbf{v}_{mag,k} \ , \tag{6.7}$$

onde $\mathbf{D}^{l}_{b,k}$ é a DCM que rotaciona o sistema local para o sistema do corpo (Na verdade, essa é a DCM que rotaciona o sistema local para o sistema do magnetômetro que, no caso, se admite alinhado com o sistema do corpo.) e $\mathbf{v}_{mag,k}$ é uma sequência ruidosa branca de f.d.p. Gaussiana com média $\mathbf{0}_{3\times1}$ e covariância $\mathbf{R}_{mag,k}$.

A DCM $\mathbf{D}^{l}_{b,k}$ pode ser, segundo o modelo de Pinson (1963), reescrita como

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^{l}_{b,k} = & \overbrace{\mathbf{D}^{p}_{b,k}}^{\text{Fornecida pelo INS}} \cdot \overbrace{\mathbf{D}^{c}_{p,k}}^{\text{Desalinhamento}} \cdot \overbrace{\mathbf{D}^{l}_{c,k}}^{\text{Erro de posição}} = \\ & = \mathbf{D}^{p}_{b,k} \cdot (\mathbf{I}_{3\times3} - [\psi_k]_\times) \cdot (\mathbf{I}_{3\times3} - [\Delta\boldsymbol{\theta}_k]_\times) = \\ & = \mathbf{D}^{p}_{b,k} \cdot (\mathbf{I}_{3\times3} - [\psi_k]_\times - [\Delta\boldsymbol{\theta}_k]_\times + [\psi_k]_\times \cdot [\Delta\boldsymbol{\theta}_k]_\times) \ .\end{aligned} \tag{6.8}$$

Como se admite que os ângulos são de magnitude pequena, o termo de segunda ordem $[\psi_k]_\times \cdot [\Delta\boldsymbol{\theta}_k]_\times$ pode ser desprezado. Dessa forma, obtém-se

$$\mathbf{D}^{l}_{b,k} \approx \mathbf{D}^{p}_{b,k} \cdot (\mathbf{I}_{3\times3} - [\psi_k]_\times - [\Delta\boldsymbol{\theta}_k]_\times) \ . \tag{6.9}$$

Substituindo 6.9 em 6.7, obtém-se

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{mag,k} & \approx \mathbf{D}^{p}_{b,k} \cdot (\mathbf{I}_{3\times3} - [\psi_k]_\times - [\Delta\boldsymbol{\theta}_k]_\times)\mathbf{B}_{l,k} + \mathbf{v}_{mag,k} = \\ & = \mathbf{D}^{p}_{b,k}\mathbf{B}_{l,k} - \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\psi_k]_\times\mathbf{B}_{l,k} - \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\Delta\boldsymbol{\theta}_k]_\times\mathbf{B}_{l,k} + \mathbf{v}_{mag,k} \ .\end{aligned} \tag{6.10}$$

Utilizando as propriedades do produto vetorial, rescreve-se 6.10 como

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{mag,k} &\approx \mathbf{D}^{p}_{b,k}\mathbf{B}_{l,k} + \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\psi_k + \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\Delta\boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{v}_{mag,k} \ , \\
\mathbf{B}_{mag,k} - \mathbf{D}^{p}_{b,k}\mathbf{B}_{l,k} &\approx \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\psi_k + \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\Delta\boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{v}_{mag,k} \ , \\
\mathbf{y}_{mag,k} &= \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\Delta\boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\psi_k + \mathbf{v}_{mag,k} \ .
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Pode-se verificar que

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{\theta}_k &= \begin{bmatrix} \frac{\Delta R_{E,k}}{R_{E,k}+h_{c,k}} \\ -\frac{\Delta R_{N,k}}{R_{N,k}+h_{c,k}} \\ -\frac{\Delta R_{E,k}\tan\lambda}{R_{E,k}+h_{c,k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{E,k}+h_{c,k}} & 0 \\ -\frac{1}{R_{N,k}+h_{c,k}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan\lambda}{R_{E,k}+h_{c,k}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta R_{N,k} \\ \Delta R_{E,k} \\ \Delta R_{D,k} \end{bmatrix} \ , \\
\Delta\boldsymbol{\theta}_k &= \mathbf{C}_k \cdot \Delta\mathbf{R}_{l,k} \ .
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Finalmente, a equação de medida do magnetômetro para o modelo de erros do INS pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{mag,k} &= \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\mathbf{C}_k\Delta\mathbf{R}_{l,k} + \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\psi_k + \mathbf{v}_{mag,k} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\mathbf{C}_k & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\mathbf{B}_{l,k}]_{\times} & \mathbf{0}_{3\times6} \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{mag,k} \ ,
\end{aligned} \tag{6.13}$$

onde $\mathbf{x}_k$ é vetor de estado do modelo de erros do INS obtido após discretização de 6.3. Alternativamente, pode-se multiplicar toda a equação pela inversa da DCM $\mathbf{D}^{p}_{b,k}$, a saber, $\mathbf{D}^{b}_{p,k} = \mathbf{D}^{p,T}_{b,k}$, escrevendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{b}_{p,k}\mathbf{y}_{mag,k} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\mathbf{C}_k & \mathbf{0}_{3\times3} & [\mathbf{B}_{l,k}]_{\times} & \mathbf{0}_{3\times6} \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}^{b}_{p,k}\mathbf{v}_{mag,k} \ , \\
\mathbf{y}^{*}_{mag,k} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\mathbf{C}_k & \mathbf{0}_{3\times3} & [\mathbf{B}_{l,k}]_{\times} & \mathbf{0}_{3\times6} \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}^{b}_{p,k}\mathbf{v}_{mag,k} \ .
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Observe que, se for utilizada um INS com plataforma estabilizada, se tem que $\mathbf{D}^{b}_{p,k} = \mathbf{I}_{3\times3}$, pois o magnetômetro está fornecendo medidas no sistema da plataforma.

Quando o magnetômetro não está calibrado de forma eficiente ou quando o modelo do campo geomagnético apresenta um erro excessivo, é esperado que a medição $\mathbf{y}_{mag,k}$ apresente um erro $\boldsymbol{\delta}_{b,k}$ quando a IMU está instalada de forma solidária ao corpo e com o magnetômetro alinhado ao sistema do corpo. Logo, as equações de medição apresentadas podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{mag,k} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\mathbf{C}_k & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{D}^{p}_{b,k}[\mathbf{B}_{l,k}]_{\times} & \mathbf{0}_{3\times 6} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\delta}_{b,k} + \mathbf{v}_{mag,k} \;, \\ \mathbf{y}^{*}_{mag,k} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\mathbf{C}_k & \mathbf{0}_{3\times 3} & [\mathbf{B}_{l,k}]_{\times} & \mathbf{0}_{3\times 6} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{D}^{b}_{p,k}\boldsymbol{\delta}_{b,k} + \mathbf{D}^{b}_{p,k}\mathbf{v}_{mag,k} \;. \end{aligned} \tag{6.15}$$

De maneira geral, existem dois tipos de erro que contribuem para a existência de $\boldsymbol{\delta}_b$. O primeiro é a interferência eletromagnética que os diversos componentes do veículo podem causar no magnetômetro. O segundo é a falta de acurácia do modelo do campo geomagnético. A modelagem acurada desses tipos de erro pode ser demasiadamente complicada. Neste texto, será considerado que a fonte de erros $\boldsymbol{\delta}_{b,k}$ será uma constante aleatória, pois espera-se que a sua dinâmica seja lenta. Com isso, esse componente pode ser chamado de *bias* do magnetômetro. Se essa suposição não for verdadeira e essa componente apresentar variação pequena, estas incorreções podem ser contornadas através de sintonia do filtro de Kalman (CHAGAS; WALDMANN, 2012c).

Finalmente, a equação de medição para o magnetômetro pode ser escrita como

$$\mathbf{y}^{*}_{mag,k} = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{l,k}]_{\times}\mathbf{C}_k & \mathbf{0}_{3\times 3} & [\mathbf{B}_{l,k}]_{\times} & \mathbf{0}_{3\times 6} & \mathbf{D}^{b}_{p,k} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{e,k} + \mathbf{D}^{b}_{p,k}\mathbf{v}_{mag,k} \;, \tag{6.16}$$

onde $\mathbf{x}_{e,k}$ é o estado do modelo de erros estendido do INS obtido após discretização de 6.5 e $\mathbf{D}^{b}_{p,k} = \mathbf{I}_{3\times 3}$ quando a IMU está montada sobre uma plataforma estabilizada.

Como pode ser visto, o magnetômetro consegue medir o erro de desalinhamento entre o sistema computado e o sistema da plataforma. Para aplicações de baixo custo, com sensores inerciais de baixa qualidade, uma deriva grande nos girômetros faz com que a solução de navegação do INS divirja rapidamente. Nessa situação, a linearização para a obtenção do modelo de erros se dá de maneira muito incorreta e o processo de auxilio utilizando sensores não-inerciais não consegue limitar os erros adequadamente. Nesses casos é imprescindível a presença de um elemento que consiga limitar erros de desalinhamento, como é o caso do magnetômetro utilizado da maneira descrita nesta seção. Uma outra possibilidade é a utilização de uma câmera com processamento de imagens adequado; entretanto, a complexidade de implementação e a alta necessidade computacional para tal necessitam de equipamento mais avançado do que é necessário para integrar os magnetômetros. Devido a isso, frequentemente unidades inerciais comerciais de baixo-custo possuem um magnetômetro integrado, como, por exemplo, as unidades inerciais XSENS MTi-G (XSENS TECHNOLOGIES B.V., 2008) e ADIS16400/ADIS16405 (ANALOG DEVICES, INC., 2009).

6.8 Observabilidade do Modelo de Erros

As estimativas oriundas do filtro de Kalman estendido devem ser utilizadas para corrigir a solução do INS apenas quando o filtro convergir. Em outras palavras, é desejável a utilização das estimativas do EKF apenas quando a covariância do erro de estimação decresce para um valor limite. Segundo Brammer e Siffling (1989), o sistema deverá ser completamente observável para que a covariância do erro de estimação atinja um valor mínimo independente do valor inicial em todas as direções do espaço de estados.

No caso do modelo de erros do INS auxiliado por GPS e magnetômetro com *bias*, a observabilidade foi estudada em Chagas e Waldmann (2012c). O estudo se baseou na análise de um sistema constante por partes conforme a metodologia de Goshen-Meskin e Bar-Itzhack (1992a) e Goshen-Meskin e Bar-Itzhack (1992b). Dessa forma, admite-se que existam segmentos em que o modelo de erros do INS permanece constante por um determinado período. Isso significa que o movimento da aeronave, tanto a mudança das forças específicas como a mudança da atitude, deve ocorrer de tal forma que o modelo de erros possa ser aproximado por um sistema dinâmico constante por partes (CHAGAS; WALDMANN, 2012a). Neste contexto, Chagas e Waldmann (2012c) provaram que o modelo de erros do INS auxiliado por GPS e magnetômetro com *bias* é observável se

- Existirem, no mínimo, dois segmentos em que a atitude da IMU é alterada;
- A força específica não deve estar alinhada com a velocidade angular do sistema local em relação ao sistema inercial em nenhum dos segmentos; e
- A força específica **ou** a velocidade angular do sistema local em relação ao sistema inercial não deve ser perpendicular ao eixo de Euler em torno do qual uma única rotação alinha o sistema do corpo no primeiro segmento com o sistema do corpo no segundo segmento.

Adicionalmente, o resultado em Goshen-Meskin e Bar-Itzhack (1992b), que foi reestudado em Chagas e Waldmann (2012a), também é válido para este caso. Logo, o sistema também poderá ser completamente observável se existirem três segmentos com forças específicas distintas em que a diferença entre a força específica do primeiro segmento e do segundo segmento seja linearmente independente da diferença entre a força específica do primeiro segmento e do terceiro segmento (CHAGAS; WALDMANN, 2012a).

Observa-se que as condições mostradas para se obter observabilidade completa são gerais. Dessa forma, se o veículo possuir movimento angular e efetuar mudanças de acelerações, pode-se considerar que o modelo de erros é completamente observável.

6.9 Proposta para a Estimação Distribuída de Erros de Navegação

Propõe-se estudar o problema de estimação distribuída em uma frota de VANTs. Segundo o modelo em 6.5, cada veículo possuirá o seu próprio sistema dinâmico que, a princípio, não estará relacionado com o modelo dos demais. Dessa forma, pode-se considerar que em cada nó o modelo de erros dinâmico do INS, desprezando o ruído de modelagem, é expresso por

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{A}_i(t)\cdot\mathbf{x}_i(t)\ , \\
\mathbf{A}_i &= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
[\rho_{l,i}]_\times & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{g}_{e,i} & \alpha_i & \Gamma_i & \mathbf{D}^b_{l,i} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \beta_i & \mathbf{0}_{3\times3} & -\mathbf{D}^b_{l,i} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}
\end{array}\right]\ , \\
\mathbf{x}_i &= \left[\begin{array}{cccccc} \Delta\mathbf{R}^T_{l,i} & \Delta\mathbf{V}^T_{l,i} & \psi^T_i & \nabla^T_{b,i} & \epsilon^T_{b,i} & \delta^T_{b,i} \end{array}\right]^T\ ,
\end{aligned} \tag{6.17}$$

em que o subscrito i indica que a grandeza é relativa ao i-ésimo VANT e o subscrito e, que indica o modelo estendido com o *bias* de magnetômetro, será suprimido para simplificar a notação. A sua forma discreta pode ser escrita como

$$\mathbf{x}_{k+1,i} = \mathbf{F}_{k,i}\mathbf{x}_{k,i} + \mathbf{u}_{k,i} + \mathbf{G}_{k,i}\mathbf{w}_{k,i}\ , \tag{6.18}$$

onde $\mathbf{x}_{k,i} = \mathbf{x}_i(t_k)$, $\mathbf{F}_{k,i} = e^{\mathbf{A}_i(t_{k-1})\cdot\Delta}$, Δ é o período de amostragem, $\mathbf{G}_{k,i}\mathbf{w}_{k,i}$ é o ruído de modelo conforme descrito em 5.6 e $\mathbf{u}_{k,i}$ é um vetor de controle virtual utilizado para remover a média do estado atualizado quando o *reset* do INS é feito, conforme comentado na seção 6.6. Ele é construído da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_{k,i} = -\mathbf{F}_{k,i}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \bullet \delta^u_{k-1} \, , \tag{6.19}$$

onde $\bullet$ indica a multiplicação linha-a-linha de vetores e δ^u_{k-1} é um vetor 18×1 cuja n-ésima linha é 1 se a n-ésima componente do estado foi utilizada para corrigir o INS no instante anterior $k-1$ e 0 caso contrário. Isto provê uma resposta idêntica ao procedimento usual de fazer com que o vetor de estado atualizado no instante $k-1$ seja 0 nas componentes utilizadas para o *reset* no mesmo instante. Entretanto, a abordagem com o vetor de controle virtual é necessária para a aplicação em sistemas com atrasos, pois deve-se armazenar todos os instantes e as componentes utilizadas no *reset* e, com essa abordagem, basta armazenar os vetores de controle.

Será considerado que cada VANT possui um receptor GNSS (seção 6.7.1) e um magnetômetro (seção 6.7.2). Além disso, será considerado que existe um canal de comunicação em que os VANTs poderão trocar informações. Se o i-ésimo VANT receber uma medida do receptor GNSS do j-ésimo VANT, então o primeiro deverá ter acesso a posição relativa entre os dois VANTs ($\mathbf{p}_{k,e,j\to i}$), conforme ilustrado na figura 6.3, para construir a função em 5.13 e poder utilizar essa informação no seu filtro. Para verificar isso, basta notar que

$$\mathbf{p}^{GNSS}_{k,e,j} + \mathbf{p}_{k,e,j\to i} \triangleq \mathbf{p}^{GNSS,i}_{k,e,j} \, , \tag{6.20}$$

onde $\mathbf{p}^{GNSS,i}_{k,e,j}$ é, então, uma medição da posição do i-ésimo VANT utilizando a medida do receptor GNSS do j-ésimo VANT e a medida de posição relativa entre os dois veículos. É impor-

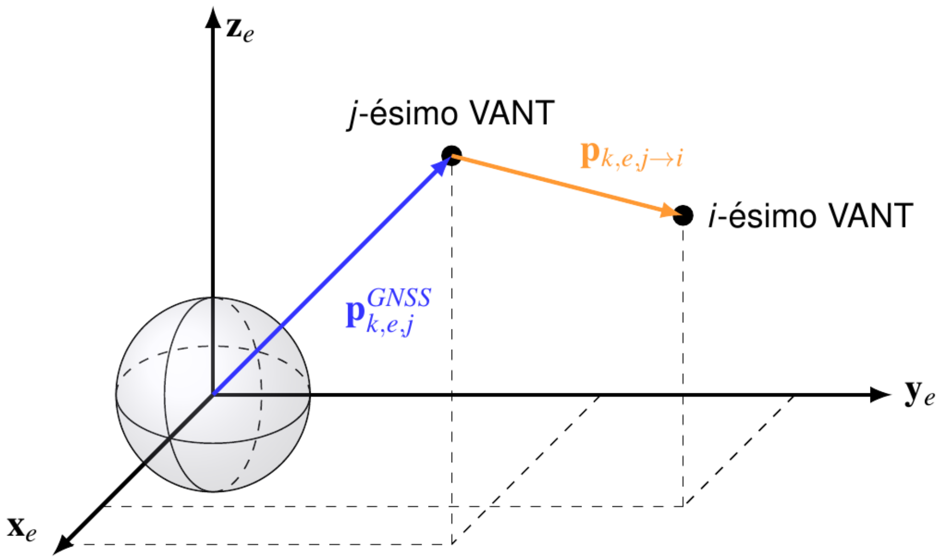

FIGURA 6.3 – Ilustração da medição de posição relativa entre dois VANTs.

tante notar que a informação de posição relativa não poderá ser construída utilizando os dados dos receptores GNSS de ambos os VANTs, pois, nesse caso, nenhuma informação nova estará disponível. A posição relativa pode ser obtida, por exemplo, de um dispositivo imageador e processamento adequado da imagem capturada ou por um medidor de distância utilizando radio-frequência como estudado por Lapid-Maoz e Bar-Itzhack (2000). Finalmente, a medida do vetor de estado do modelo de erros do INS utilizando a informação do j-ésimo VANT pode ser construída como

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{GNSS,i}_{k,j} &= \mathbf{D}^{e}_{l,k,i}(\mathbf{p}^{GNSS,i}_{k,e,j} - \mathbf{p}^{INS}_{k,e,i}) \,, \\
\mathbf{y}^{GNSS,i}_{k,j} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k,i} + \mathbf{D}^{e}_{l,k,i}\mathbf{v}^{GNSS,i}_{k,j} \,, \\
\mathbf{y}^{GNSS,i}_{k,j} &= \mathbf{H}^{GNSS,i}_{k,j}\mathbf{x}_{k,i} + \mathbf{D}^{e}_{l,k,i}\mathbf{v}^{GNSS,i}_{k,j} \,,
\end{aligned} \tag{6.21}$$

onde $\mathbf{v}^{GNSS,i}_{k,j}$ é assumido ser uma sequência ruidosa branca e Gaussiana com matriz de covariância $\mathbf{R}^{GNSS,i}_{k,j}$. Note que, se o ruído medição da posição relativa entre os VANTs for independente do ruído do sensor GNSS, pode-se escrever utilizando 6.20 que

$$\mathbf{R}_{k,j}^{GNSS,i} = \mathbf{R}_{k,j,pos}^{GNSS} + \mathbf{R}_{k,j\to i} \ , \tag{6.22}$$

em que $\mathbf{R}_{k,j,pos}^{GNSS}$ é a matriz de covariância do ruído de medição da posição pelo sensor GNSS do j-ésimo VANT e $\mathbf{R}_{k,j\to i}$ é a matriz de covariância do ruído de medição da posição relativa entre o i-ésimo e o j-ésimo VANT.

Retomando a discussão iniciada na seção 5.2, será assumido que o i-ésimo VANT recebeu a medida descrita por 6.20 do j-ésimo VANT e, assim, montou o vetor de medição mostrado em 6.21. Então, chamando de

$$\mathbf{y}_{k,i}^{l} = \mathbf{H}_{k,i}^{l}\mathbf{x}_{k,i} + \mathbf{v}_{k,i}^{l} \tag{6.23}$$

as medidas obtidas dos sensores do i-ésimo VANT, com $\mathbf{R}_{k,i}^{l} = cov(\mathbf{v}_{k,i}^{l}, \mathbf{v}_{k,i}^{l})$, e utilizando 5.10, a f.d.p. *a posteriori* para este caso pode ser calculada como

$$p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{\Omega}_k) = p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1}, \mathbf{y}_{k,i}^{l}, \mathbf{y}_{k,j}^{GNSS,i}) = C_k p(\mathbf{y}_{k,j}^{GNSS,i}|\mathbf{x}_{k,i}, \mathbf{y}_{k,i}^{l}) p(\mathbf{y}_{k,i}^{l}|\mathbf{x}_{k,i}) p(\mathbf{x}_{k,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1}) \ , \tag{6.24}$$

com C_k sendo uma constante de normalização. Uma vez que se relacionou a medida da rede $\mathbf{y}_{k,j}^{GNSS,i}$ com o estado local do i-ésimo nó através de 6.21, pode-se calcular a f.d.p. $p(\mathbf{y}_{k,j}^{GNSS,i}|\mathbf{x}_{k,i}, \mathbf{y}_{k,i}^{l})$ obtendo

$$p(\mathbf{y}_{k,j}^{GNSS,i}|\mathbf{x}_{k,i}, \mathbf{y}_{k,i}^{l}) = p(\mathbf{y}_{k,j}^{GNSS,i}|\mathbf{x}_{k,i}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_{k,j}^{GNSS,i}; \mathbf{H}_{k,j}^{GNSS,i}\mathbf{x}_{k,i}, \mathbf{D}_{l,k,i}^{e}\mathbf{R}_{k,j}^{GNSS,i}\mathbf{D}_{l,k,i}^{e,T}) \ . \tag{6.25}$$

Observando que, devido às considerações de ruído, os vetores $\mathbf{y}_{k,i}^{l}$ e $\mathbf{y}_{k,j}^{GNSS,i}$ são independentes quando condicionados em $\mathbf{x}_{k,i}$, então a f.d.p. conjunta desses dois vetores condicionada em $\mathbf{x}_{k,i}$

pode ser escrita como (PAPOULIS, 1991)

$$p(\mathbf{y}_{k,i}^{l}, \mathbf{y}_{k,j}^{GNSS,i} | \mathbf{x}_{k,i}) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k,i}^{l} \\ \mathbf{y}_{k,j}^{GNSS,i} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k,i}^{l} \\ \mathbf{H}_{k,j}^{GNSS,i} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k,i}, diag(\mathbf{R}_{k,i}^{l}, \mathbf{D}_{l,k,i}^{e} \mathbf{R}_{k,j}^{GNSS,i} \mathbf{D}_{l,k,i}^{e,T}) \right) . \tag{6.26}$$

Dessa forma, pode-se verificar, através de 5.10, que o passo de atualização em 6.24 é calculado, considerando processos Gaussianos, através das equações do filtro de Kalman utilizando como vetor de medida

$$\mathbf{y}_{k,i}^{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k,i}^{l} \\ \mathbf{y}_{k,j}^{GNSS,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k,i}^{l} \\ \mathbf{H}_{k,j}^{GNSS,i} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k,i} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{k,i}^{l} \\ \mathbf{D}_{l,k,i}^{e} \mathbf{v}_{k,j}^{GNSS,i} \end{bmatrix} . \tag{6.27}$$

Com isso, conclui-se que é possível atualizar o filtro do i-ésimo VANT no instante k utilizando a medida de posição dos veículos vizinhos desde que esteja disponível a informação de posição relativa entre as aeronaves.

Se a medida do j-ésimo VANT chegar ao i-ésimo VANT com um atraso, então os algoritmos desenvolvidos anteriormente podem ser utilizados para fundir esta medida de maneira correta no filtro de Kalman do i-ésimo VANT. Deve-se notar que as posições relativas e os dados do receptor GNSS não precisam ser transmitidos ao mesmo tempo. Entretanto, os VANTs deverão armazenar as posições relativas recebidas desde o instante $k - max$ até o instante k para converter de maneira apropriadas as medidas dos receptores GNSS dos VANTs vizinhos conforme descrito em 6.20.

Finalmente, propõe-se estudar o cenário de uma formação de VANTs que estão voando e trocando informações relativas aos seus sensores GNSS. Como a transmissão dessas medidas e a computação das posições relativas podem consumir um tempo consideravelmente maior que o período de amostragem, principalmente se posições relativas forem obtidas de dispositivos imageadores, considera-se que estas informações trafegam na rede com atrasos. Assim, será verificada a performance dos algoritmos mostrados aqui para fusão de informações atrasadas em uma rede de sensores distribuídos.

6.10 Simulações e Resultados

As simulações apresentadas nessa seção foram feitas em um ambiente controlado, para medição mais precisa da carga computacional, utilizando Linux Mint LMDE com Kernel 3.2.0 x86_64. O computador utilizado foi um Intel Core i5-750 com 8GB de memória RAM. Todos os algoritmos foram implementados em MATLAB e algumas funções foram implementadas em C (CMEX) para reduzir o tempo de computação.

Para validar os algoritmos de fusão de medidas atrasadas no problema de estimação distribuída dos erros de navegação, simulou-se uma frota de 5 VANTs. Esse limite foi definido pela quantidade de memória RAM disponível no computador. Para um número maior de VANTs simulados, não era possível manter toda a simulação na memória RAM, o que fazia o tempo de simulação proibitivamente alto devido às operações de *swap* com o disco rígido. A solução do INS em cada VANT foi dada pelo algoritmo com múltiplas taxas de amostragem para determinação de atitude e de navegação em Salychev (2004). Cada veículo possui como sensores auxiliares um receptor GNSS e um magnetômetro. Os canais de comunicação bidirecionais estão mostrados na figura 6.4. Conforme mencionado na seção 2.5, foi adotado que os nós repassam aos seus vizinhos toda a informação que for recebida da rede e a fusão de medidas ocorrerá utilizando toda a informação disponível pelo nó, mesmo que esta esteja atrasada. Note que não serão processadas medidas que se mostrem repetidas que cheguem a um nó por caminhos diferentes na rede para não violar a hipótese considerada para obtenção de 3.62. Para que isso possa ser feito, é necessário que as medidas transmitidas contenham identificação da procedência, como um endereço único do nó na rede, acompanhada por estampa de tempo. Dessa forma, os nós deverão armazenar em uma tabela a identificação de todas as medidas fundidas entre os instantes $k-max$ e k. Será definido também um custo de comunicação que significa o número de períodos de amostragem que uma informação levará para trafegar entre dois nós vizinhos. Então, por exemplo, se o custo de comunicação for 10, logo o VANT 2 terá acesso às suas medidas locais sem atraso, às medidas locais dos VANTs 3 e 5 com 10 períodos de amostragem de atraso, às medidas locais do VANT 1 com 20 períodos de amostragem de atraso e, finalmente, às medidas locais do VANT 4 com 30 períodos de amostragem de atraso. Diversos parâmetros relacionados às simulações podem ser visualizados na tabela 6.1. Adicionalmente, o movimento linear e angular de cada VANT pode ser visto no apêndice H. Observe que, muito embora o *bias* do magnetômetro tenha sido modelado como uma constante, nas simulações se considerou que ele apresenta uma determinada dinâmica para que o cenário simulado fosse mais realista (CHAGAS; WALDMANN, 2012b).

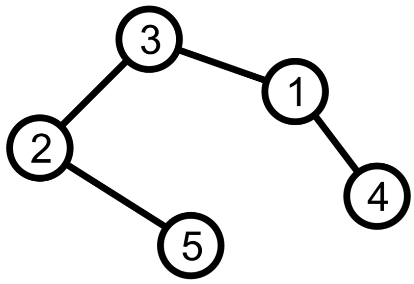

FIGURA 6.4 – Canais de comunicação para frota de VANTs simulados.

Os VANTs não trocam nenhuma informação antes de $t = 40$ s. Adicionalmente, o VANT 2 perde o seu sensor GNSS após $t = 60$ s, e, assim, os dados de seu magnetômetro embarcado e as medidas atrasadas da rede de sensores são as únicas informações disponíveis para a fusão. Nessa situação, adicionou-se uma incerteza na determinação do tempo pelo VANT 2 conforme descrito na tabela 6.1, pois ele não terá mais acesso à sincronização de seu relógio quando o

TABELA 6.1 – Parâmetros das simulações

Sensores	
Bias dos acelerômetros	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}^T$ mg
Deriva dos girômetros	$\begin{bmatrix} 1000 & 1000 & 1000 \end{bmatrix}^T$ $\circ$/h
Bias dos magnetômetros	$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 cos(t/100+\mathcal{F}_1) & \mathcal{A}_2 cos(t/100+\mathcal{F}_2) & \mathcal{A}_3 cos(t/100+\mathcal{F}_3) \end{bmatrix}^T$ mGauss, onde $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ são variáveis aleatórias com f.d.p. uniforme no intervalo $[-10,+10]$ mGauss e $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ são variáveis aleatórias com f.d.p. uniforme no intervalo $[-2\pi,+2\pi]$ rad, todas essas variáveis aleatórias são amostradas a cada realização para cada VANT.
Cov. ruído acelerômetros ($\mathbf{R}_\nabla$)	$diag\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (mg)^2$
Cov. ruído girômetros ($\mathbf{R}_\epsilon$)	$diag\begin{pmatrix} 500 & 500 & 500 \end{pmatrix} (\circ/\text{h})^2$
Cov. ruído GNSS	$diag\begin{pmatrix} 81 & 81 & 81 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$ Unidades no SI^2
Cov. ruído magnetômetro	$diag\begin{pmatrix} (2\cdot 10^{-5})^2 & (2\cdot 10^{-5})^2 & (2\cdot 10^{-5})^2 \end{pmatrix}$ Gauss^2
Cov. medida de posição relativa	$5 \cdot diag\begin{pmatrix} 81 & 81 & 81 \end{pmatrix}$ m^2
Incerteza do relógio sem o sensor GNSS	Foi selecionada como uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[-500, 500]$ ms, que é amostrada em cada realização para cada VANT.
Frequência de amostragem do GNSS e do Magnetômetro	1 Hz
INS	
Posição inicial	$(23°12'\ S + 0.05 \cdot \mathcal{G}_{lat})$, $(45°52'\ W + 0.05 \cdot \mathcal{G}_{lon})$, onde $\mathcal{G}_{lat}$ e $\mathcal{G}_{lon}$ são variáveis aleatórias Gaussianas de média 0 ” e desvio padrão de 1”.
Altitude inicial	700 m $+ \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é uma variável aleatória Gaussiana de média 0 m e desvio padrão de 1 m.
Velocidade inicial	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ m/s
Alinhamento inicial	Algoritmo TRIAD (SHUSTER; OH, 1981)
Taxa de amostragem da solução do INS (t_{ins})	0,01 s
Filtro de Kalman	
Início do *reset* do INS	30 s
$\mathbf{Q}$, $t < 30$ s	$diag\begin{pmatrix} \frac{t_{ins}}{50} \cdot \mathbf{Q}^* & 4\cdot 10^{-10} & 4\cdot 10^{-10} & 4\cdot 10^{-10} \end{pmatrix}$ Unidades no SI^2
$\mathbf{Q}$, $t \geq 30$ s	$diag\begin{pmatrix} \frac{t_{ins}}{450} \cdot \mathbf{Q}^* & 4\cdot 10^{-10} & 4\cdot 10^{-10} & 4\cdot 10^{-10} \end{pmatrix}$ Unidades no SI^2
$\mathbf{Q}^*$	$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{D}_l^b & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & -\mathbf{D}_l^b \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}_{6\times 6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\nabla & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{R}_\epsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{D}_l^b & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & -\mathbf{D}_l^b \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}_{6\times 6}} \end{bmatrix}^T$ Unidades no SI^2
Covariância inicial	$diag(\ 50^2\ 50^2\ 50^2\ 2^2\ 2^2\ 2^2\ 0.05\ 0.05\ 0.05\ 0.09\ 0.09\ 0.09\ 0.015\ 0.015\ 0.015\ 1\ 1\ 1)$ Unidades no SI^2
Estimativa inicial	$\mathbf{0}_{18\times 1}$ Unidades no SI
Máximo atraso permitido (*max*)	4000 instantes de amostragem.

sensor GNSS parar de funcionar. A comparação de performance entre os algoritmos de fusão de medidas atrasadas foi realizada utilizando o erro RMS de cada componente do estado do

VANT 2, definida, para cada instante de amostragem k, como

$$RMS(n,k) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sqrt{(\mathbf{x}_{k,2}(n;j) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k,2}(n;j))^2}\,, \tag{6.28}$$

onde $\mathbf{x}_{k,2}(n;j)$ é o valor real do n-ésimo componente do vetor de estado no VANT 2 na j-ésima realização, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k,2}(n;j)$ é a estimativa do mesmo componente utilizando todas as medidas disponíveis ao VANT 2 até o instante k na j-ésima realização e N é o número de realizações da simulação de Monte Carlo, que foi definido como 100. O erro RMS foi calculado para cada um dos 18 componentes do estado do VANT 2 e o resultado foi plotado para cada cenário descrito a seguir utilizando escala vertical logarítmica.

Para a validação e comparação dos algoritmos, foram propostos seis cenários:

- **Cenário 01**: o custo de comunicação foi definido como 950 e as medidas foram fundidas de maneira ingênua, ou seja, sem utilizar os algoritmos descritos para fusão de medidas atrasadas. Os erros RMS do erro de posição estão mostrados na figura 6.5.

- **Cenário 02**: o custo de comunicação foi definido como 1 e as medidas atrasadas foram fundidas utilizando os três algoritmos descritos no capítulo 3. Os erros RMS de cada componente do estado estão plotados nas figuras 6.6 e 6.7.

- **Cenário 03**: o custo de comunicação foi definido como 250 e as medidas atrasadas foram fundidas utilizando os três algoritmos descritos no capítulo 3. Os erros RMS de cada componente do estado estão plotados nas figuras 6.8 e 6.9.

- **Cenário 04**: o custo de comunicação foi definido como 950 e as medidas atrasadas foram fundidas utilizando os três algoritmos descritos no capítulo 3. Os erros RMS de cada componente do estado estão plotados nas figuras 6.10 e 6.11.

- **Cenário 05**: o custo de comunicação foi definido como 1950 e as medidas atrasadas foram fundidas utilizando os algoritmos da reiteração do filtro de Kalman e o transporte de medidas descritos no capítulo 3. O algoritmo de extrapolação de medidas não foi utilizado, pois apresentava divergência devido ao atraso muito grande na recepção das medidas. Os erros RMS de cada componente do estado estão plotados nas figuras 6.12 e 6.13.

- **Cenário 06**: o custo de comunicação foi definido como 950 e as medidas atrasadas foram fundidas utilizando o algoritmo de extrapolação de medidas com e sem a remoção de viés conforme descrito na seção 3.2. Os erros RMS para cada componente do estado estão plotados nas figuras 6.14 e 6.15.

Na figura 6.16 plotou-se uma sequência típica para os resíduos dos três métodos abordados, com suas respectivas curvas de desvio-padrão computadas (1σ), obtidas do cenário 04. Observe que neste problema, para os métodos sub-ótimos, o vetor de medidas possui dimensão variável de acordo com o atraso das medidas recebidas (vide eqs. 3.1 e 3.47). Isso, por sua vez, faz com que a dimensão do vetor de resíduo também varie. Dessa forma, na figura 6.16, estão presentes apenas os resíduos relacionados ao desalinhamento obtidos das medidas recebidas do magnetômetro, que não possuem atrasos. Neste caso, a unidade das curvas plotadas é rad^{-1} devido à transformação do vetor de medidas presente em 2.12. Nas figuras 6.17 e 6.18 plotaram-se as variâncias dos erros de estimação para cada componente do vetor de estado calculadas pelos três métodos na mesma realização na qual foram obtidas as curvas dos resíduos na figura 6.16. Observe que todas essas figuras tiveram a escala do seu eixo vertical limitadas pra facilitar a visualização.

Na tabela 6.2 estão mostradas estimativas das cargas computacionais relativas aos cenários de 2 a 5 para cada um dos algoritmos, feitas através do tempo de execução medido pelo

MATLAB e estão normalizadas considerando a carga da fusão de apenas medidas locais, ou seja, a carga computacional para gerar apenas a estimativa local.

TABELA 6.2 – Carga computacional relativa dos algoritmos para fusão de medidas atrasadas nos cenários propostos no capítulo 6 tomando por referência a estimativa local.

Cenário	**Custo de Comunicação**	**Método** *Carga computacional medida em relação à da estimativa local*		
		Abordagem Clássica	**Extrapolação de Medidas**	**Transporte de Medidas**
2	1	2,68	2,14	1,95
3	250	39,91	6,47	15,67
4	950	133,88	17,56	54,88
5	1950	165,86	-	47,26

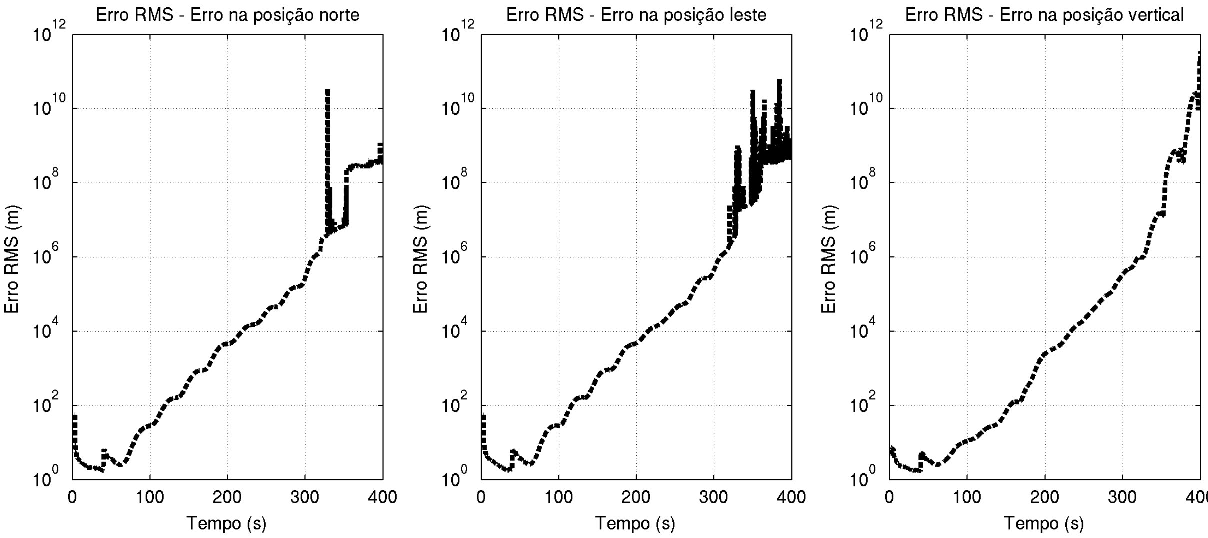

FIGURA 6.5 – Cenário 01 - Erro RMS dos componentes do estado relacionados aos erros de posição.

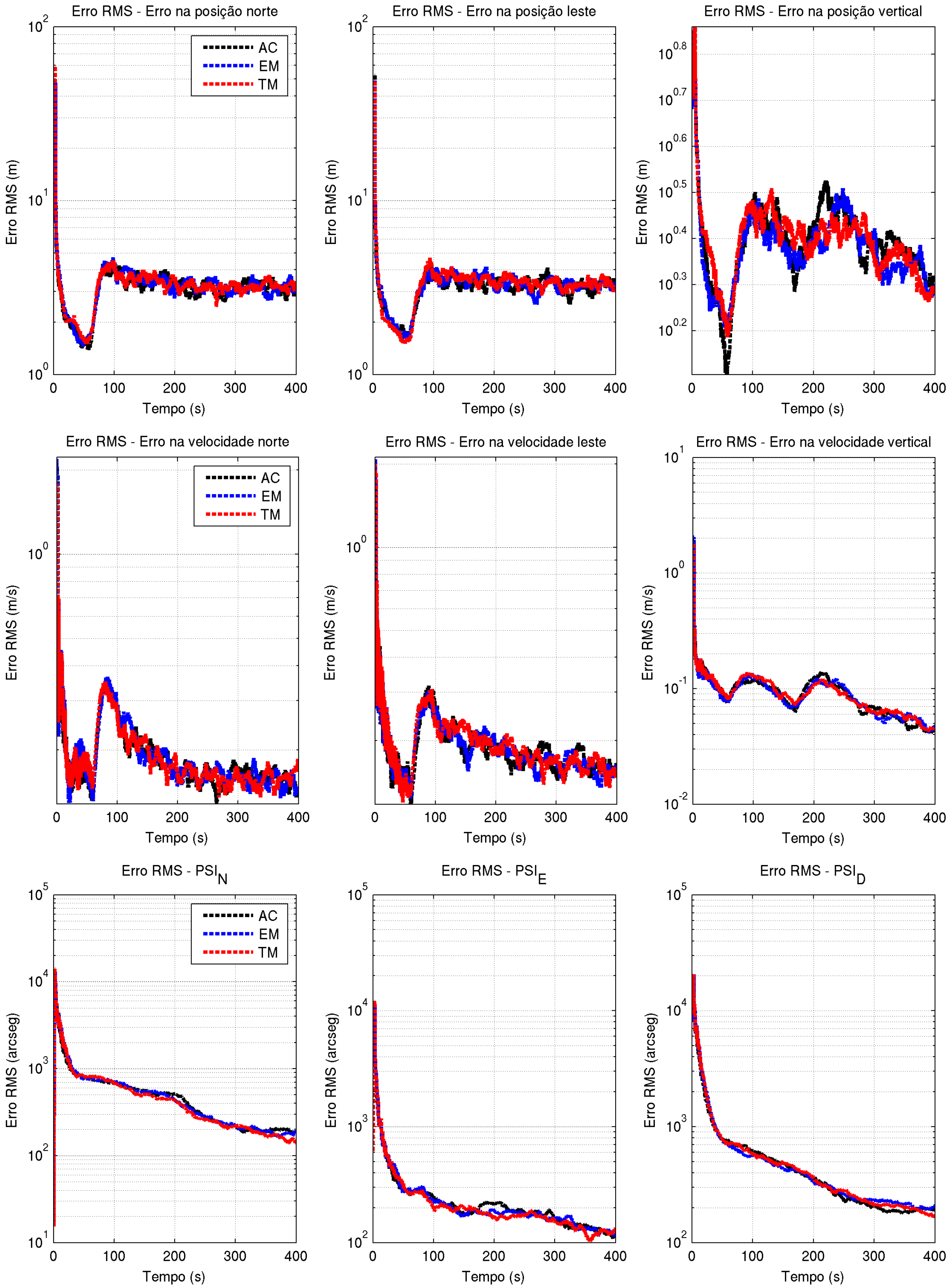

FIGURA 6.6 – Cenário 02 - Erro RMS dos componentes do estado relacionados aos erros de posição e velocidade e aos desalinhamentos.

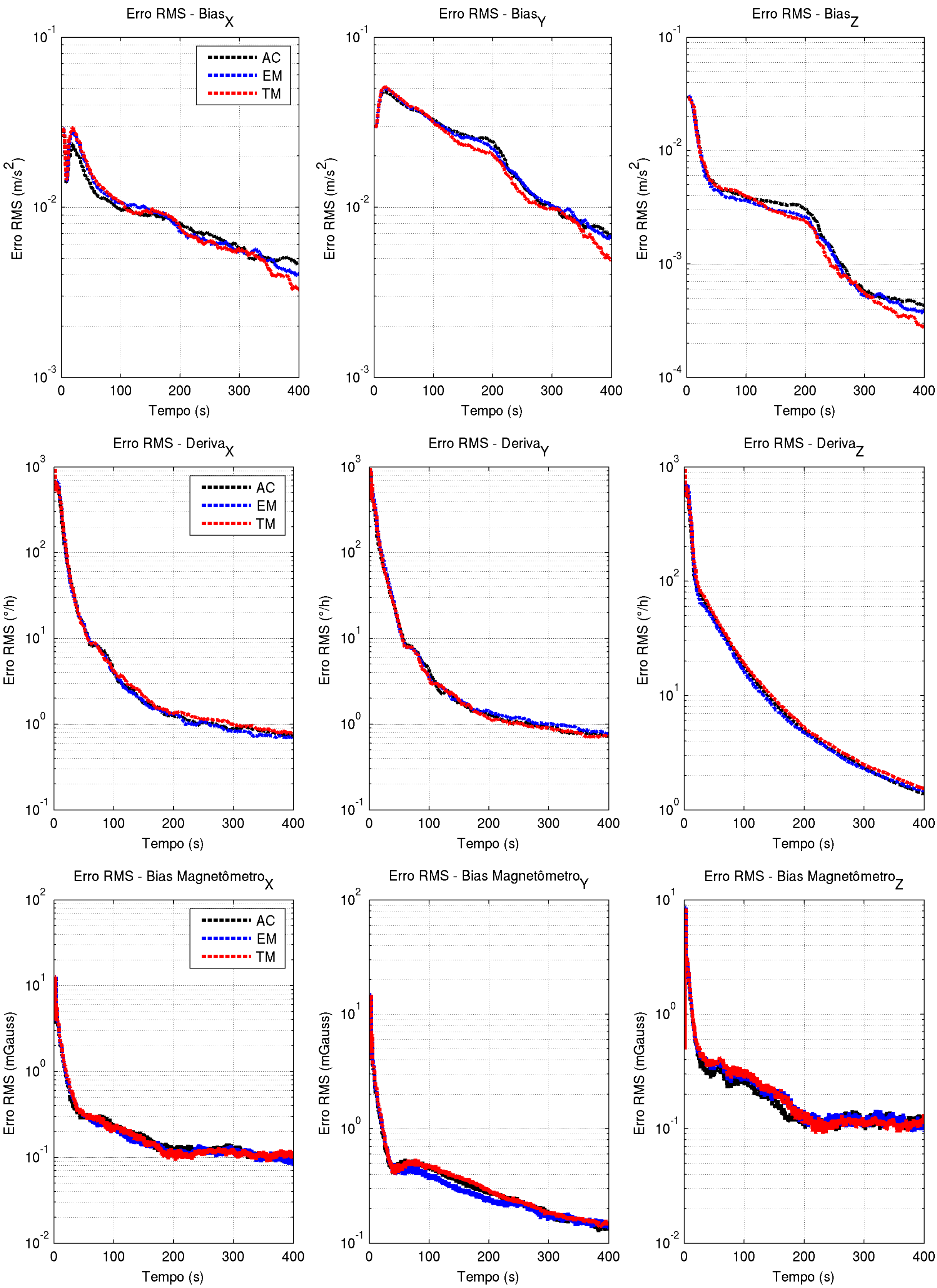

FIGURA 6.7 – Cenário 02 - Erro RMS dos componentes do estado relacionados aos *biases* dos acelerômetros, às derivas dos girômetros e aos *biases* dos magnetômetros.

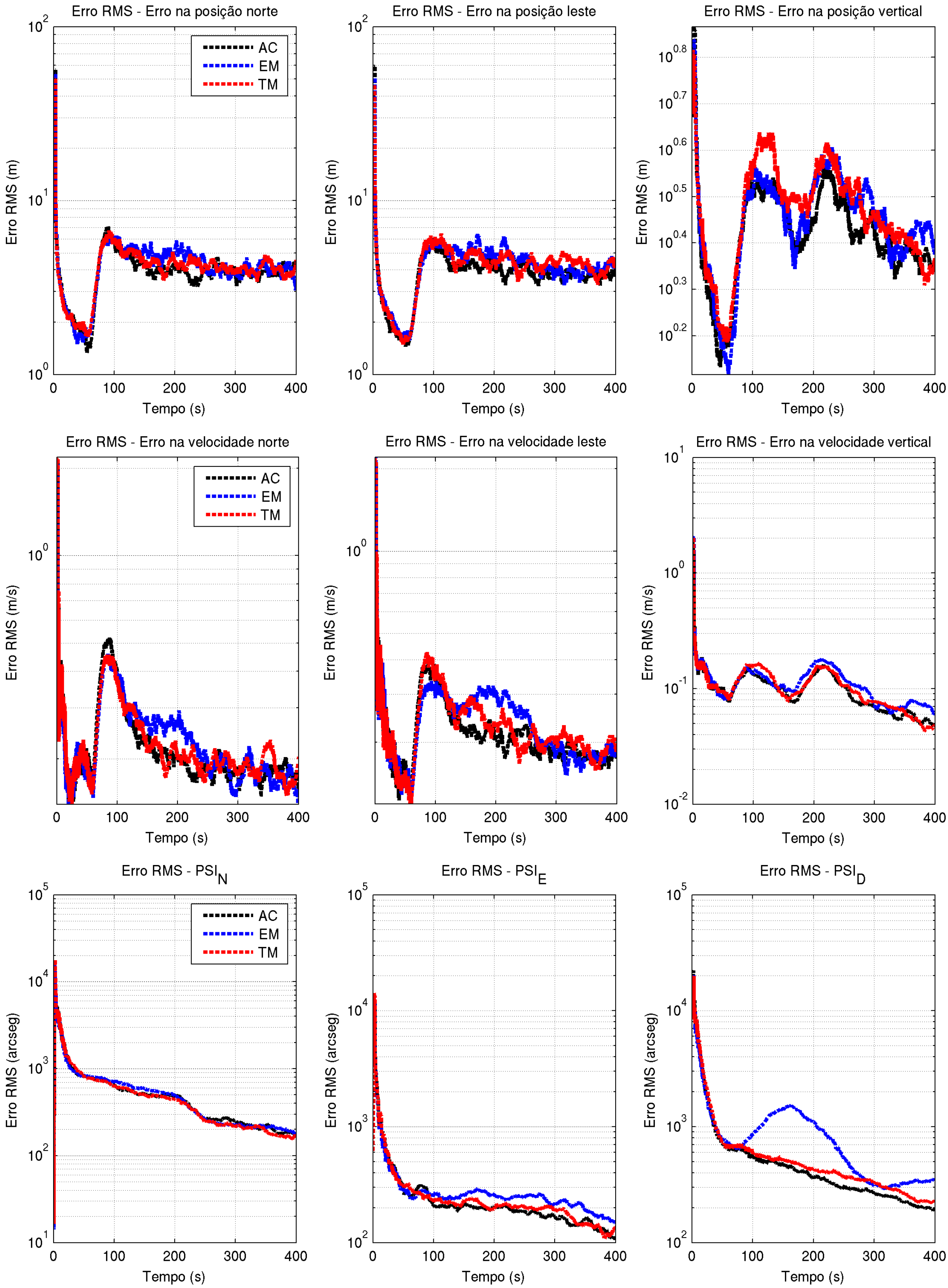

FIGURA 6.8 – Cenário 03 - Erro RMS dos componentes do estado relacionados aos erros de posição e velocidade e aos desalinhamentos.

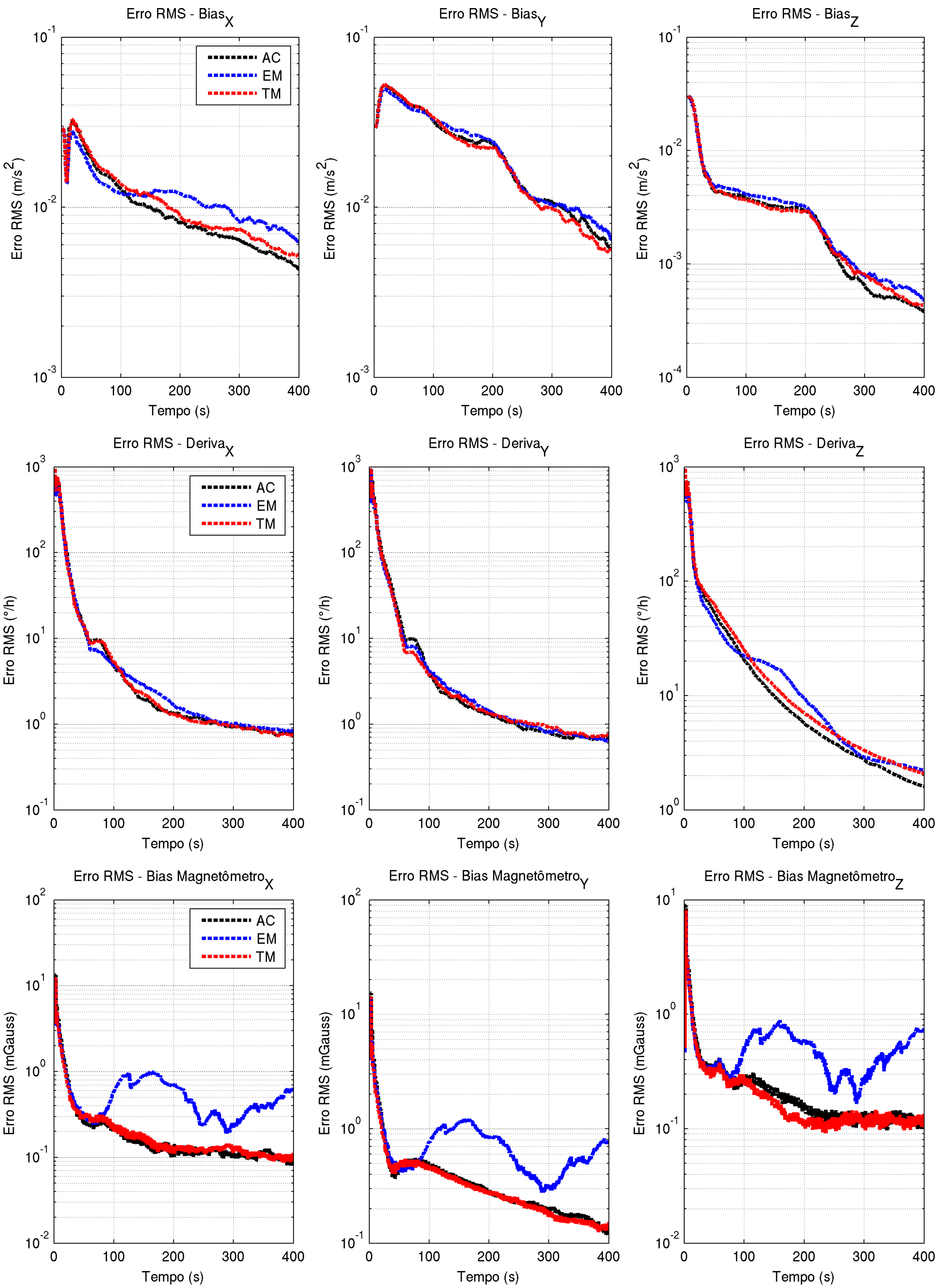

FIGURA 6.9 – Cenário 03 - Erro RMS dos componentes do estado relacionados aos *biases* dos acelerômetros, às derivas dos girômetros e aos *biases* dos magnetômetros.

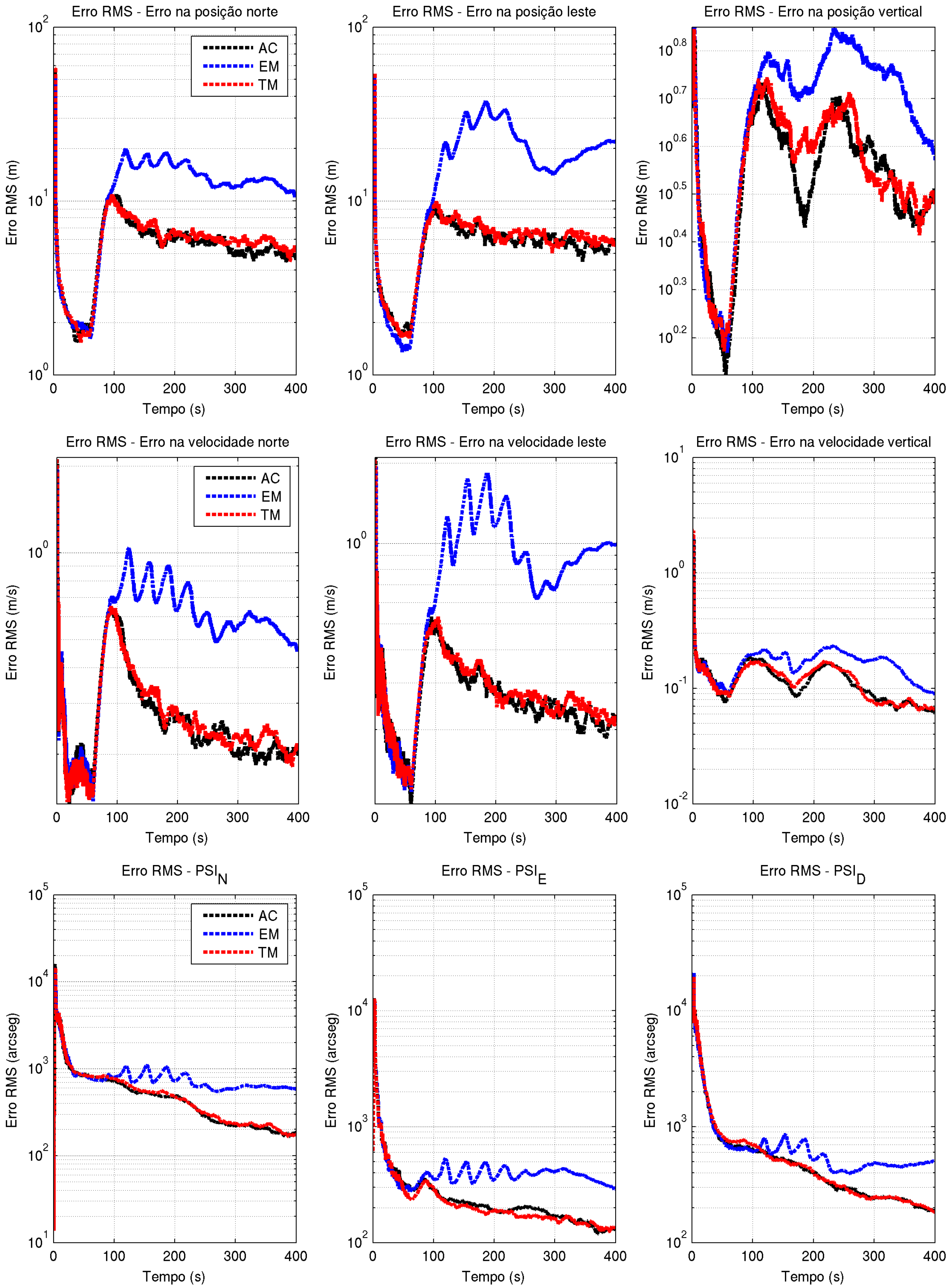

FIGURA 6.10 – Cenário 04 - Erro RMS dos componentes do estado relacionados aos erros de posição e velocidade e aos desalinhamentos.

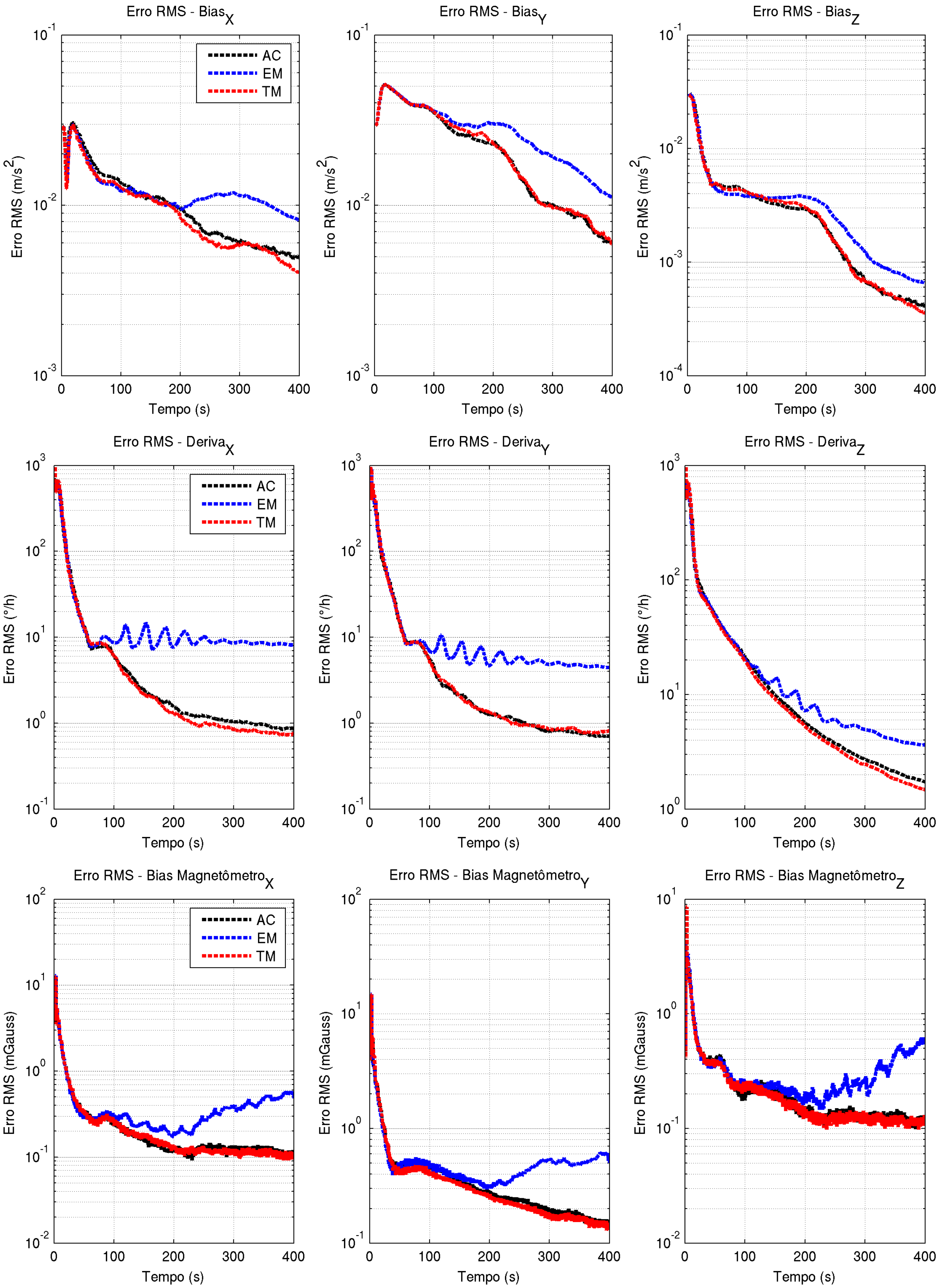

FIGURA 6.11 – Cenário 04 - Erro RMS dos componentes do estado relacionados aos *biases* dos acelerômetros, às derivas dos girômetros e aos *biases* dos magnetômetros.

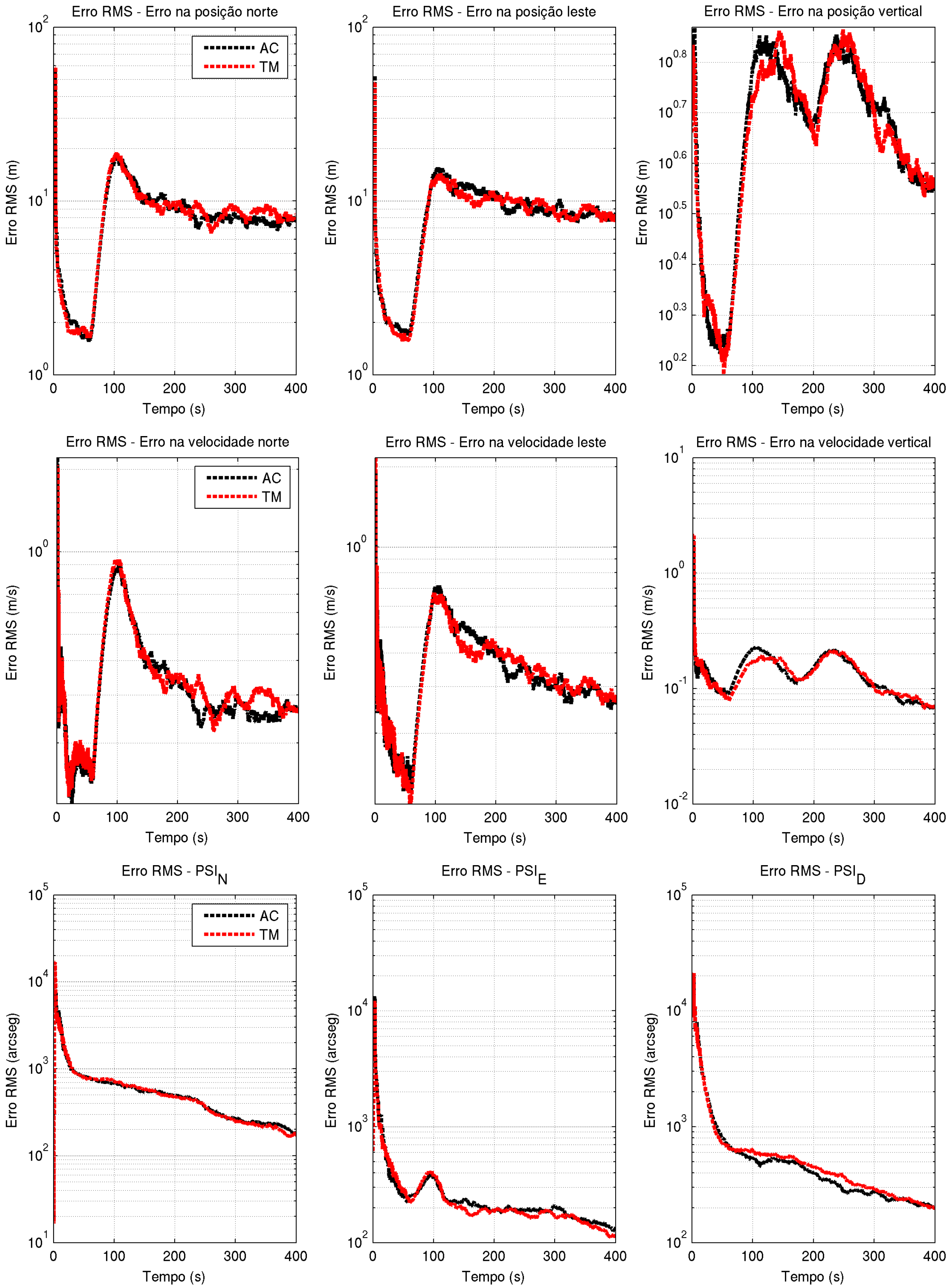

FIGURA 6.12 – Cenário 05 - Erro RMS dos componentes do estado relacionados aos erros de posição e velocidade e aos desalinhamentos.

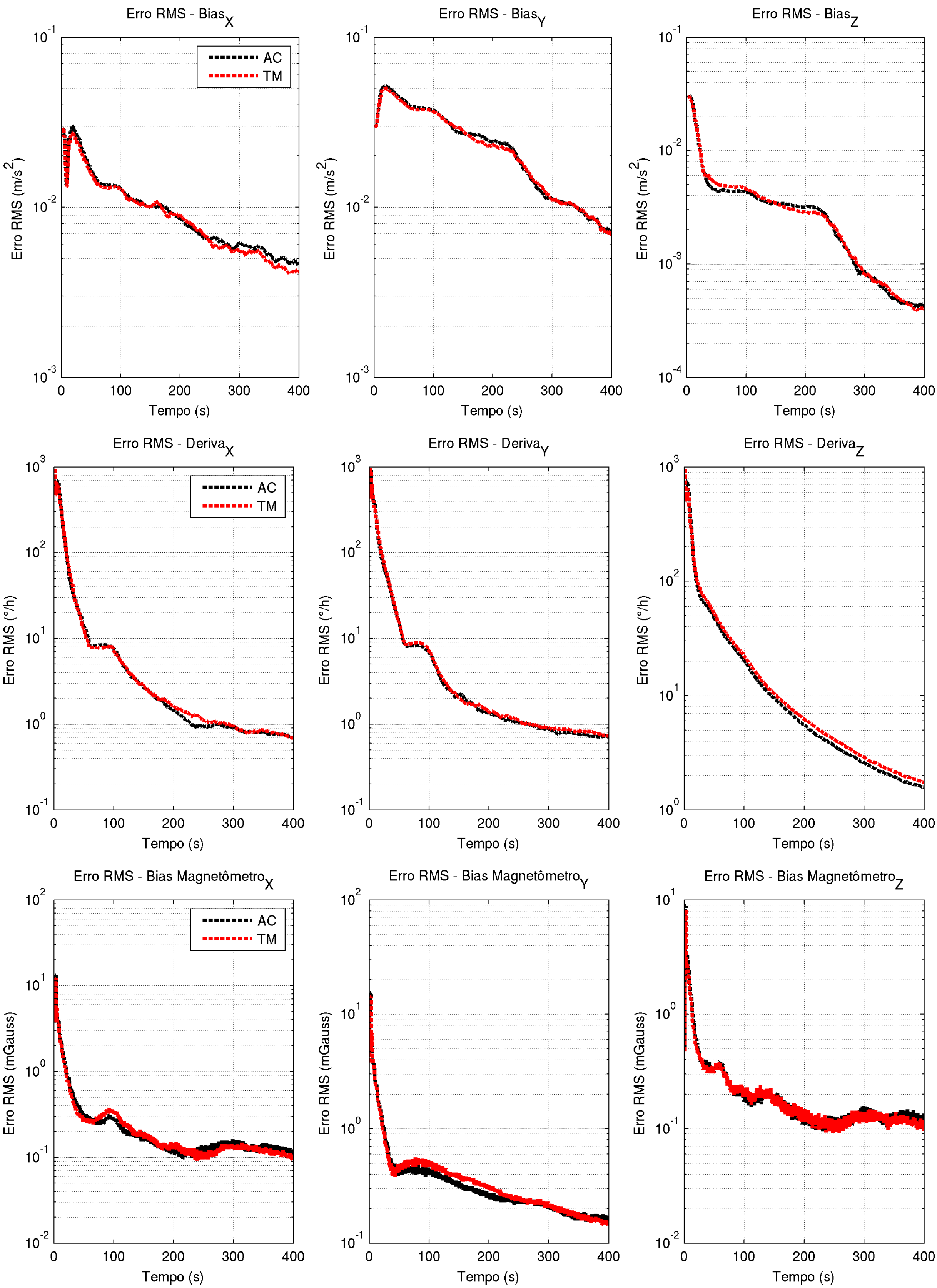

FIGURA 6.13 – Cenário 05 - Erro RMS dos componentes do estado relacionados aos *biases* dos acelerômetros, às derivas dos girômetros e aos *biases* dos magnetômetros.

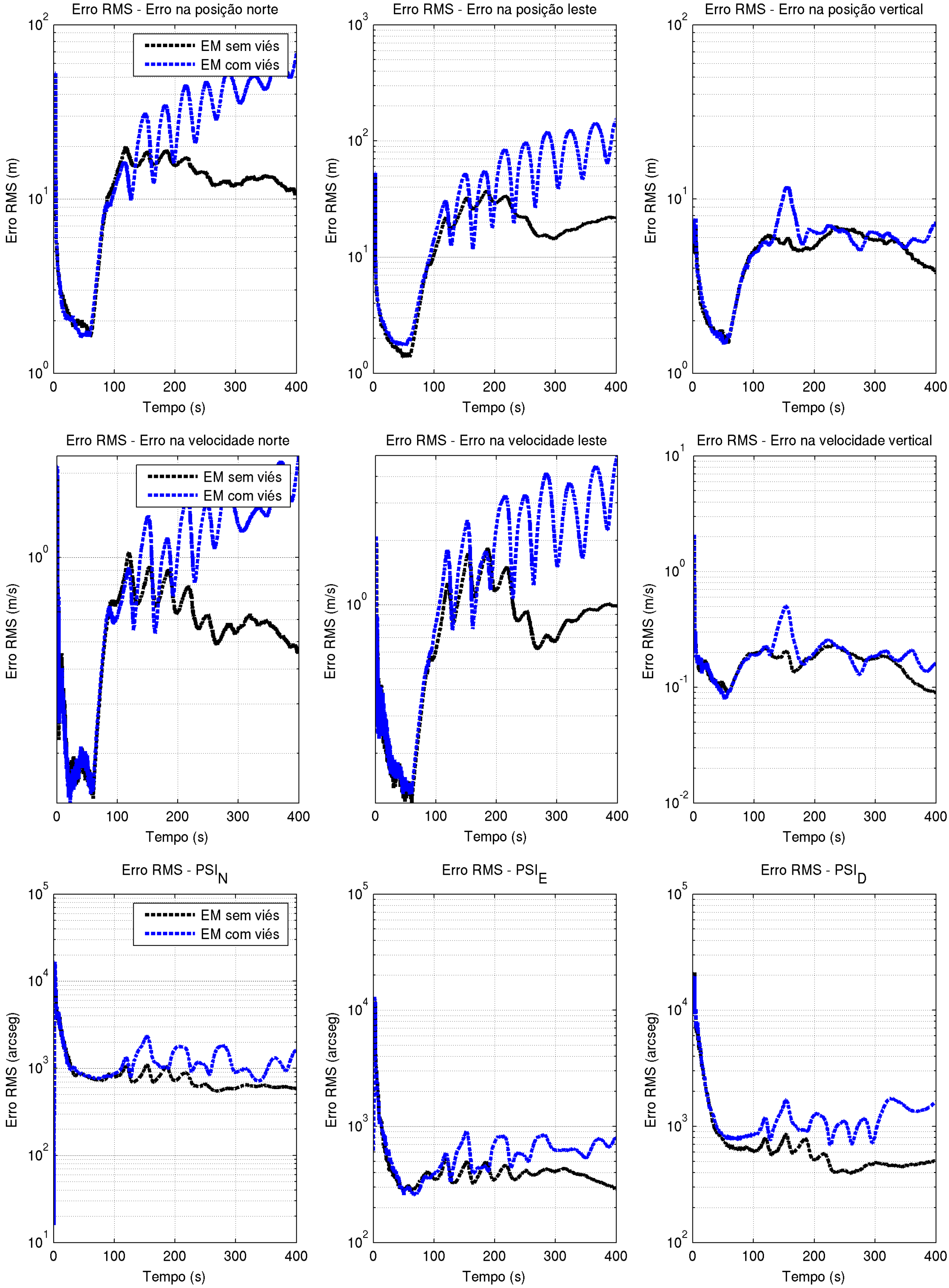

FIGURA 6.14 – Cenário 06 - Erro RMS dos componentes do estado relacionados aos erros de posição e velocidade e aos desalinhamentos.

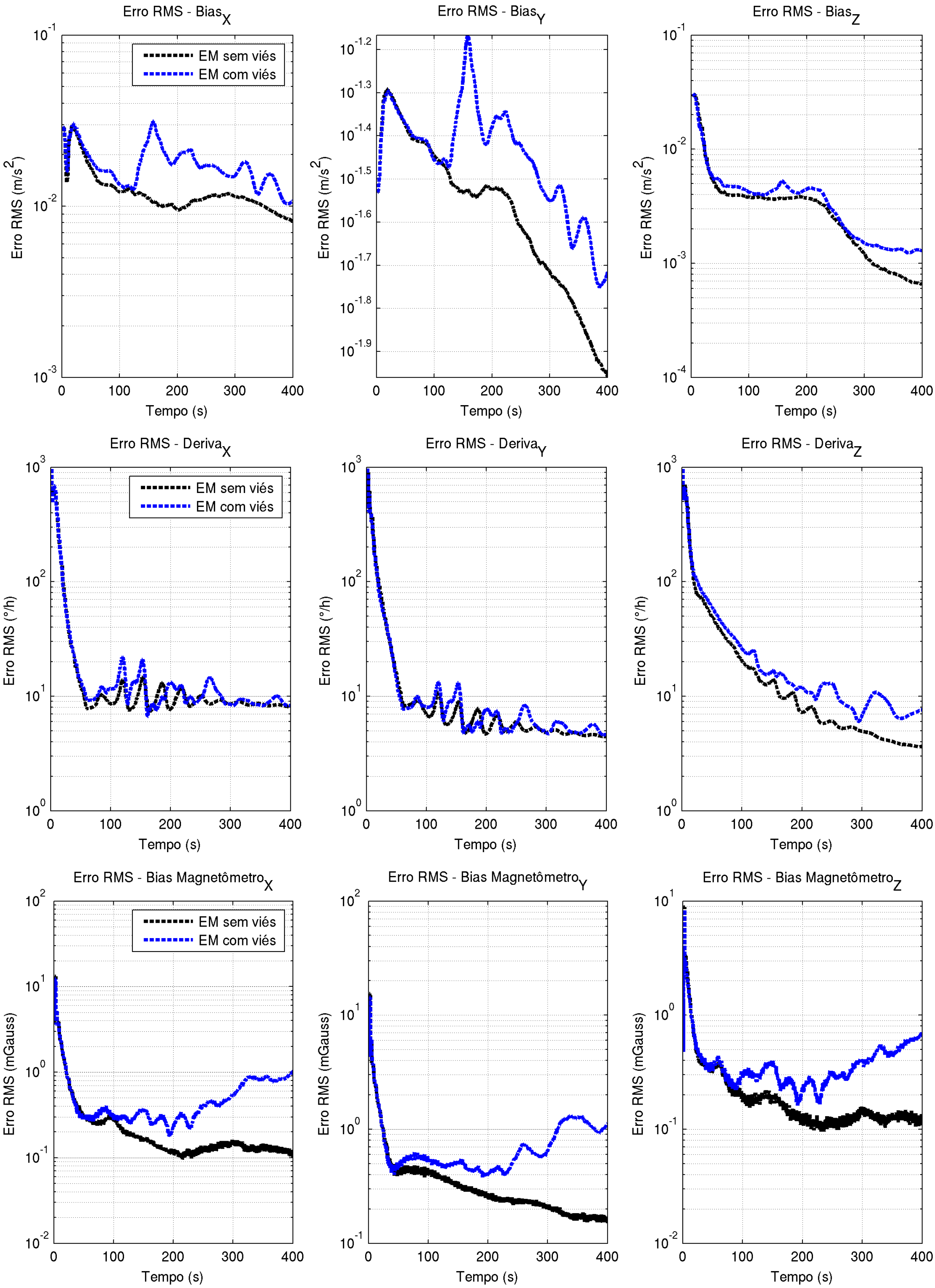

FIGURA 6.15 – Cenário 06 - Erro RMS dos componentes do estado relacionados aos *biases* dos acelerômetros, às derivas dos girômetros e aos *biases* dos magnetômetros.

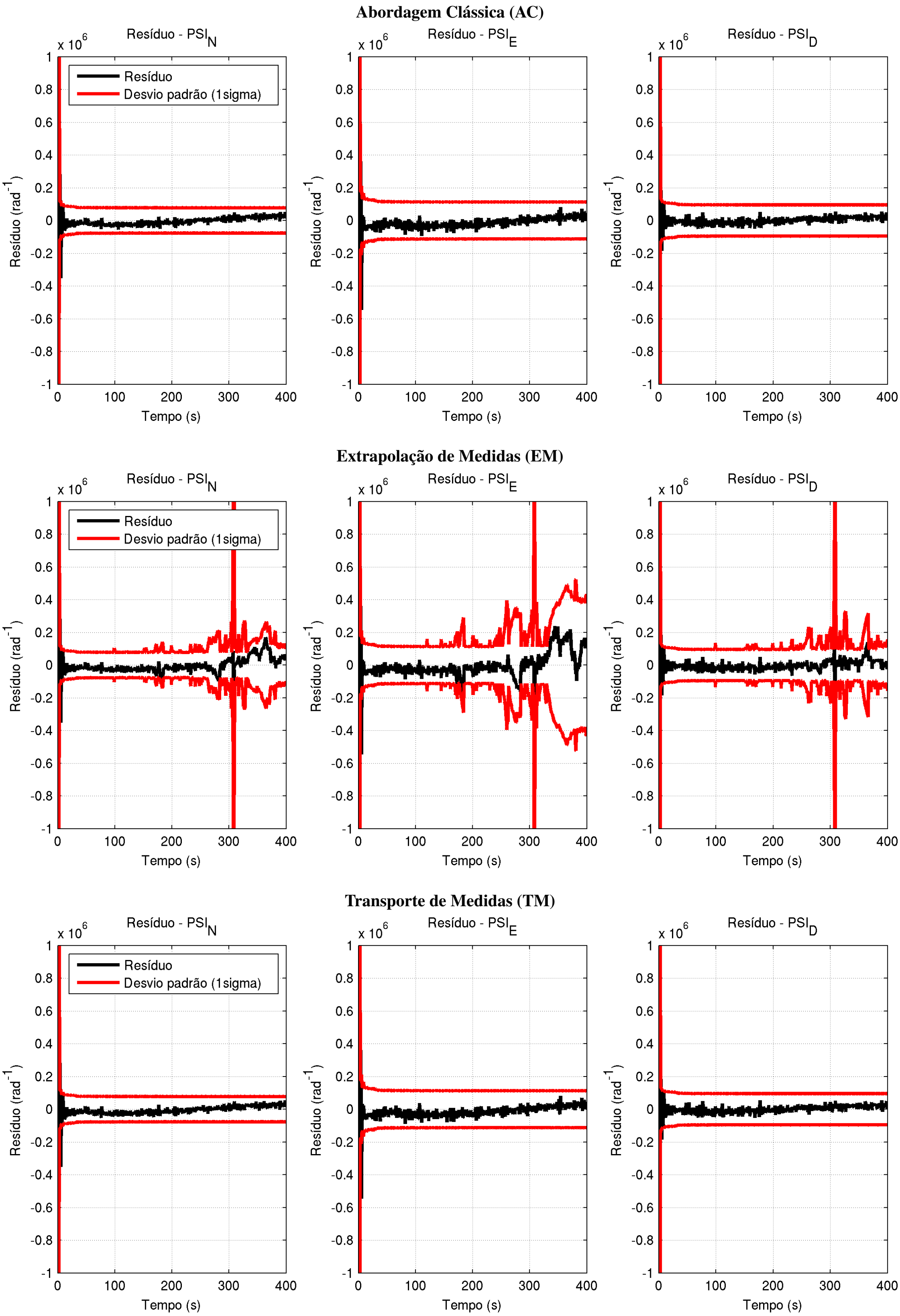

FIGURA 6.16 – Resíduos relacionados ao desalinhamento, com suas respectivas curvas de desvio-padrão (1σ), computados pelos métodos abordagem clássica (primeira linha), extrapolação de medidas (segunda linha) e transporte de medidas (terceira linha) em uma realização típica do cenário 04.

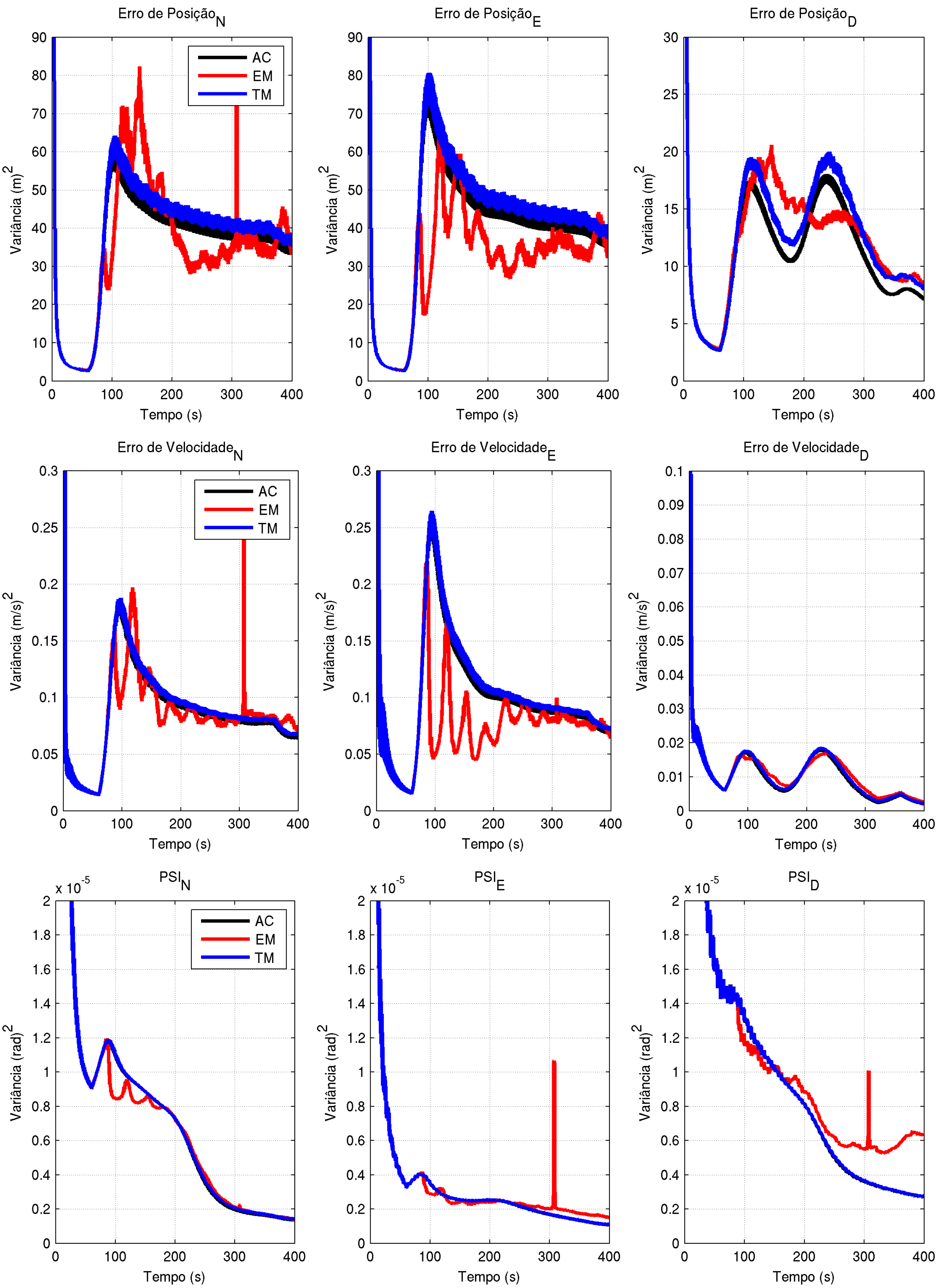

FIGURA 6.17 – Variâncias calculadas pelos três métodos em uma realização típica do cenário 04 para os componentes do estado relacionados ao erro de posição, ao erro de velocidade e ao desalinhamento.

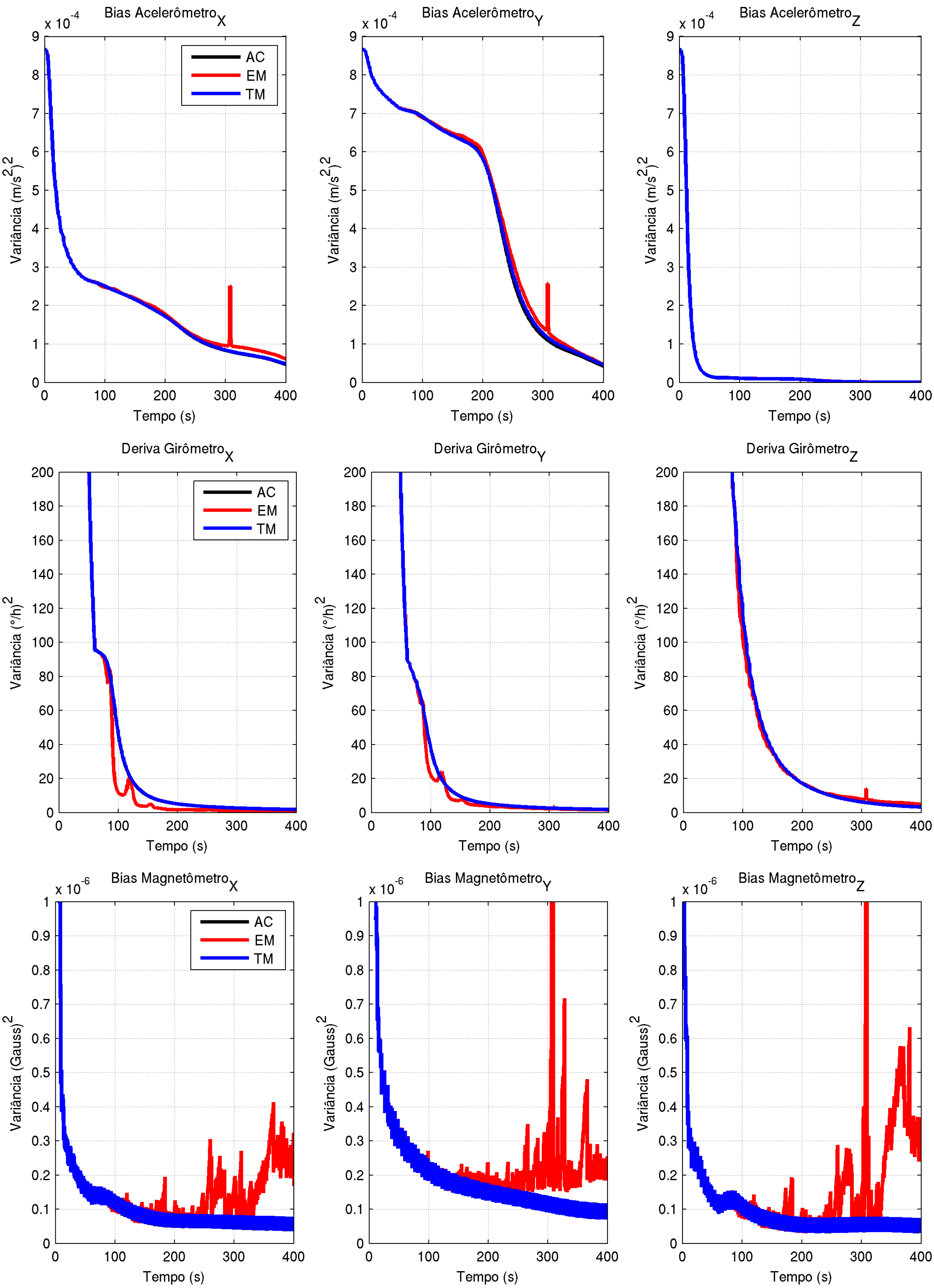

FIGURA 6.18 – Variâncias calculadas pelos três métodos em uma realização típica do cenário 04 para os componentes do estado relacionados aos *biases* dos acelerômetros, às derivas dos girômetros e aos *biases* dos magnetômetros.

6.11 Análise dos Resultados

Analisando os resultados expostos na seção 6.10, conclui-se:

- De acordo com o cenário 1, a fusão de medidas atrasadas sem o devido processamento pode levar o processo de estimação à divergência.

- A conclusão apresentada pela análise de carga computacional na seção 4.1 foi verificada neste caso. Mesmo esta desconsiderando o tempo necessário para operações como a cópia de memória, que começa a ser relevante neste caso devido a alta dimensionalidade do sistema. Quando o atraso é pequeno, os três métodos apresentam carga computacional parecida. Entretanto, conforme o atraso começa a aumentar, a abordagem clássica se apresenta como o método mais custoso, seguido pelo transporte de medidas e, por último, a extrapolação de medidas. Na implementação utilizada nas simulações, devido a restrições do MATLAB, todos os algoritmos são executados em uma única *thread*. Entretanto, em aplicações reais com processadores múltiplos, os algoritmos extrapolação de medidas e transporte de medidas podem ser paralelizados, o que diminuiria o seu tempo de execução. Em contrapartida, a abordagem clássica não pode, a princípio, ser paralelizada, pois deve-se executar a reiteração do filtro de Kalman de maneira sequencial.

- Convém notar que a carga computacional medida pelo MATLAB para o transporte de medidas no cenário 05 foi menor que a apresentada no cenário 04. Isso ocorre porque, no cenário 05, as medidas do VANT 4 são desprezadas, uma vez que elas são recebidas pelo VANT 2 atrasadas por 5850 instantes de amostragem e o atraso máximo admissível (*max*) foi escolhido como 4000 instantes de amostragem.

- Analisando os cenários 2, 3, 4 e 5, verifica-se que todos os algoritmos fundem de maneira adequada as medidas atrasadas no sentido de que as estimativas dos erros no VANT 2 não divergem. Para o cenário 2, os três algoritmos produziram resultados equivalentes. Entretanto, com a quantidade de atraso imposta pelos cenários 3 e 4, claramente o método extrapolação de medidas apresenta desempenho bastante inferior aos demais. Comparando a abordagem clássica com o transporte de medidas, em nenhum cenário simulado houve indícios que um método é melhor do que o outro. Isso é explicado devido ao baixo número de realizações feitas para cada cenário (100). Como a dimensão do estado é 18 e existem diversas variáveis aleatórias influenciando nas estimativas, como o erro na determinação do tempo pelo VANT 2 e o *bias* do magnetômetro variante no tempo, deveria-se utilizar muito mais realizações para uma comparação mais precisa. Entretanto, a capacidade computacional disponível não faz com que seja possível realizar tais simulações em tempo hábil. No entanto, para fins práticos neste problema, pode-se considerar que a performance da abordagem clássica e do transporte de medidas são equivalentes. Observando os resultados do exemplo numérico simplificado na seção 4.4, verifica-se que esse dois métodos possuem performance bastante parecida também.

- Conforme mencionado na seção 6.6, o modelo de erros é linearizado na solução oriunda do INS. Logo, pode-se considerar este um problema não linear que é linearizado de maneira análoga ao mostrado na seção 5.1. Dessa forma, o método da reiteração do filtro de Kalman obterá uma performance melhor se a reiteração for executada concorrentemente à re-linearização do processo dinâmico. Apenas dessa forma é que se pode garantir que a abordagem clássica (AC) fornecerá a mesma estimativa que seria obtida se a medida atrasada tivesse sido fundida no momento em que foi auferida. Entretanto, para re-linearizar o modelo de erros, é necessário que o algoritmo do INS seja também reexecutado. Em testes, isto impôs uma carga computacional tão elevada que o computador utilizado para as simulações não conseguiria iterar este algoritmo em tempo real para atrasos tão grandes como o do cenário 2. Por causa disso, essa abordagem não foi utilizada.

- Observando o cenário 06, verifica-se que o ganho em desempenho obtido pela remoção do viés no método extrapolação de medidas é evidente. Com o algoritmo obtido, o qual foi baseado no método original para fusão de medidas atrasadas em um filtro de Kalman não-distribuído proposto por Larsen *et al.* (1998), verifica-se indícios de divergência neste cenário com custo de comunicação de 950 períodos de amostragem. Já com a remoção de viés, os resultados apresentam uma performance significativamente melhor.

- Analisando os resíduos e as variâncias dos componentes do estado para uma realização típica do cenário 04, verifica-se como o método extrapolação de medidas (EM) apresenta desempenho degradado com esta quantidade de atraso. O salto em algumas curvas de variância calculadas por este método, perto de $t = 300$s, indica que o algoritmo utilizou a fórmula de Joseph aproximada (vide eq. 3.37), pois o cálculo utilizando 3.16 forneceu uma matriz que não era positiva definida. Por outro lado, as curvas da abordagem clássica (AC) e do transporte de medidas (TM) são bastante próximas, o que mostra um outro indício de como o método sub-ótimo (TM) desenvolvido aqui possui desempenho bastante similar ao método ótimo (AC) nas condições simuladas.

- Finalmente, conclui-se que, quando o atraso da rede for pequeno, para fins práticos, pode-se utilizar tanto a extrapolação de medidas (EM) como o transporte de medidas (TM). O primeiro fornecerá uma carga computacional menor, mas necessitará de uma quantidade de memória maior. Além disso, os resultados mostraram que o uso de um método ótimo, como o caso a abordagem clássica (AC), não traz nenhum ganho perceptível para este problema. Assim, como a carga computacional da reiteração do filtro de Kalman no método AC é expressivamente maior do que a nos outros dois métodos, não convém utilizá-la, mesmo com atrasos muito grandes, para fusão de medidas atrasadas em uma rede de VANTs.

7 Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foram desenvolvidos algoritmos para realizar a fusão de medidas atrasadas em redes de sensores distribuídos quando a troca de informações ocorre com atrasos. Dessa forma, foi possível realizar a estimação distribuída dos erros de navegação inercial auxiliada em uma frota de VANTs. No cenário proposto, os veículos possuem canais de comunicação para trocar as medidas dos sensores GNSS somadas com as distâncias relativas entre as aeronaves.

Para a solução do problema mencionado, primeiramente foram desenvolvidos dois algoritmos sub-ótimos para fusão de medidas atrasadas em uma rede de sensores distribuídos em que os nós compartilham o modelo dinâmico. O primeiro método foi chamado de extrapolação de medidas e o segundo de transporte de medidas. A comparação desses métodos foi feita considerando a abordagem clássica para fusão de medidas atrasadas em uma rede de sensores: a reiteração do filtro de Kalman. Este método é ótimo por construção, mas demanda uma alta carga computacional e grande necessidade de memória, que faz o seu uso ser proibitivo em aplicações de baixo custo. Dessa forma, os dois algoritmos desenvolvidos buscaram contornar este problema ainda que apresentassem performance sub-ótima.

A comparação dos algoritmos quanto à performance, à quantidade de memória e à carga computacional foi feita, num primeiro momento, através de análises teóricas. Verificou-se que a abordagem clássica possui o melhor desempenho esperado, por ser um método ótimo, seguida do transporte de medidas e, por último, a extrapolação de medidas. Quanto a necessidade de memória, o algoritmo com requisito mais exigente é a extrapolação de medidas, seguida da abordagem clássica e do transporte de medidas. Finalmente, com relação à carga computacional e considerando sistemas com atrasos maiores que 2 instantes de amostragem, a análise teórica identificou que a abordagem clássica apresenta a maior quantidade de operações de ponto flutuante, seguida do transporte de medidas e da extrapolação de medidas.

Uma comparação inicial dos algoritmos foi feita utilizando um exemplo numérico simplificado, cujo estado possui dimensão 2. Neste contexto, pôde-se observar a validade de todas as previsões teóricas.

Após isso, propôs-se uma adaptação dos métodos para o caso em que os nós da rede não compartilham o mesmo modelo. Dessa forma, pôde-se utilizá-los para realizar a estimação distribuída dos erros de navegação inercial. Adicionalmente, mostrou-se como aplicá-los quando os modelos nos nós da rede não são lineares.

Para o problema em que os nós não compartilham o mesmo modelo, simulou-se uma frota de VANTs para analisar a performance dos algoritmos desenvolvidos. Verificou-se que a extrapolação de medidas fornece desempenho bastante degradado quando o atraso é alto. Já o método transporte de medidas se mostrou com performance similar à da abordagem clássica na aplicação investigada. Dessa forma, como a carga computacional do transporte de medidas foi muito menor do que a carga computacional da reiteração do filtro de Kalman, observa-se que o uso do primeiro (isto é, TM) apresenta um custo-benefício melhor nesta aplicação quando os atrasos são grandes. Para atrasos pequenos, todos os métodos apresentaram desempenho similar.

Finalmente, conclui-se que o estado da arte em estimação distribuída foi avançado, permitindo que, em uma rede de sensores cujos nós não compartilham o mesmo modelo dinâmico, os estados locais sejam estimados de maneira distribuída através da fusão de medidas atrasadas recebidas de outros nós. Neste contexto, foi possível realizar a estimação distribuída e a correção dos erros de sistemas de navegação inercial auxiliados por magnetômetro e GNSS embarcados em uma frota de VANTs voando em formação.

Como trabalhos futuros, pode-se citar:

- Verificar como os algoritmos de fusão de medidas atrasadas podem ser adaptados para utilizar o filtro de Kalman *unscented* ou filtro de partículas em problemas não-lineares.

- Investigar problemas de detecção de falhas em rede de sensores distribuídos quando a comunicação ocorre com atrasos.

- Verificar como a sintonia do filtro de Kalman influencia na performance dos algoritmos. Uma vez que são embutidos os erros numéricos dos algoritmos no ruído de modelo, então, a princípio, cada abordagem mostrada aqui deveria possuir uma sintonia de filtro diferente, uma vez que as fontes dos erros numéricos são distintas.

- Investigar meios de se compartilhar outros tipos de medidas na rede de VANTs além das oriundas dos sensores GNSS e magnetômetro.

Referências Bibliográficas

ANALOG DEVICES, INC. **ADIS16400/ADIS16405: Triaxial Inertial Sensor with Magnetometer**. One Technology Way, P.O. Box 9106, Norwood, MA 02062-9106, U.S.A., 2009.

ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. **Optimal Filtering**. Englewood Cliffs, New Jersey, United States of America: Prentice-Hall, Inc., 1979.

ARULAMPALAM, M. S.; MASKELL, S.; GORDON, N.; CLAPP, T. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian baysian tracking. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 50, n. 2, p. 174–185, 2002.

AZIZI, S. M.; KHORASANI, K. A distributed Kalman filter for actuator fault estimation of deep space formation flying satellites. In: **3th Annual IEEE International Systems Conference**. Vancouver, Canada: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2009. p. 354–359.

BAR-ITZHACK, I. Y. Navigation computation in terrestrial strapdown inertial navigation system. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. 13, n. 6, p. 679–689, 1977.

BAR-ITZHACK, I. Y. Corrections to navigation computation in terrestrial strapdown inertial navigation system. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. 14, n. 3, p. 542–544, 1978.

BAR-ITZHACK, I. Y. Identity between INS position and velocity error equations in the true frame. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 11, p. 590–592, 1988.

BAR-ITZHACK, I. Y.; BERMAN, N. Control theoretic approach to inertial navigation systems. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 11, p. 237–247, 1988.

BAR-SHALOM, Y.; LI, X. R.; KIRUBARAJAN, T. **Estimation with Applications to Tracking and Navigation**. United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

BAR-SHALOM, Y.; MALLICK, M.; CHEN, H.; WASHBURN, R. One-step solution for the general out-of-sequence measurement problem in tracking. In: **IEEE Aerospace Conference, 2002**. Montana, United States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2002. v. 4, p. 1551–1559.

BERG, H. F. D.-W. M. T. Generalized decentralized Kalman filters. In: **IEEE American Control Conference, 1994**. Baltimore, Maryland, United States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1994. v. 2, p. 2273–2274.

BESADA-PORTAS, E.; LOPEZ-OROZCO, J. A.; BESADA, J. A.; CRUZ, J. M. de la. Multisensor out of sequence data fusion for estimating the state of discrete control systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 54, n. 7, p. 1728–1732, 2009.

BOND, J. **Bringing GPS into Harsh Environments for Deformation Monitoring**. Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, P.O. Box 4400, Fredericton, N.B., Canada, E3B 5A3, 2007.

BORDIN, C. J.; BRUNO, M. G. S. Cooperative blind equalization of frequency-selective channels in sensor networks using decentralized particle filtering. In: **42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers**. Pacific Grove, California, United States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2008. p. 1198–1201.

BORDIN, C. J.; BRUNO, M. G. S. Nonlinear distributed blind equalization using network particle filtering. In: **15th IEEE Workshop on Statistical Signal Processing**. Cardiff, Wales: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2009. p. 469–472.

BORDIN, C. J.; BRUNO, M. G. S. Consensus-based distributed particle filtering algorithms for cooperative blind equalization in receiver networks. In: **IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2011**. Prague, Czech Republic: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2011. p. 3968–3971.

BORRE, K.; TIBERIUS, C. Time series analysis of GPS observables. In: **13th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation**. Salt Lake City, Utah, United States of America: Institute of Navigation, 2000. p. 1885–1894.

BORRELI, F.; KEVICZKY, T.; BALAS, J. G. Collision-free UAV formation flight using decentralized optimization and invariant sets. In: **43th IEEE Conference on Decision and Control**. Atlantis, Paradise Island, Bahamas: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2004. v. 1, p. 1099–1104.

BRAMMER, K.; SIFFLING, G. **Kalman-Bucy Filters**. United States of America: Artech House Publishers, 1989.

BROWN, R. G.; HARTMAN, G. L. Kalman filter with delayed states as observables. In: **National Electronics Conference, 1968**. Chicago, Illinois, United States of America: National Electronics Conference, Inc., 1968. v. 24, p. 67–72.

BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. C. **Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering**. United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 1997.

CAMPOS, R. de F. E. **Algoritmos de navegação inercial com múltiplas taxas de amostragem para fusão INS/GPS/câmera com federação de filtros.** Instituto Tecnológico de Aeronáutica: Departamento de Engenharia Eletrônica, 2011.

CARDOSO, R. **Integração de Sensores via Filtro de Kalman. Tese de mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.** Instituto Tecnológico de Aeronáutica: Departamento de Engenharia Eletrônica, 2003.

CARLSON, N. A. Federated filter for fault-tolerant integrated navigation systems. In: **IEEE Position, Location and Navigation Symposium, 1988**. Orlando, Florida, United States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1988. p. 110–119.

CATTIVELLI, F. S.; LOPES, C. G.; SAYED, A. H. Diffusion strategies for distributed Kalman filtering: formulation and performance analysis. In: **IARP Workshop on Cognitive Information Processing, 2008**. Santorini, Greece: International Association for Pattern Recognition, 2008.

CHAGAS, R. A. J.; WALDMANN, J. Difusão de medidas para estimação distribuída em uma rede de sensores. In: **XI Simpósio de Guerra Eletrônica**. São José dos Campos, São Paulo, Brasil: Simpósio de Guerra Eletrônica, 2009. p. 71–75.

CHAGAS, R. A. J.; WALDMANN, J. Extrapolação para fusão distribuída de medidas atrasadas em rede de sensores. In: **XVIII Congresso Brasileiro de Automática**. Bonito, MS, Brasil: Sociedade Brasileira de Automática, 2010. p. 1536–1542.

CHAGAS, R. A. J.; WALDMANN, J. Geometric inference-based observability analysis digest of INS error model with GPS/magnetometer/camera aiding. In: **19th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems**. Saint Petersburg, Russia: CSRI Elektropribor, JSC, 2012. p. 162–175.

CHAGAS, R. A. J.; WALDMANN, J. A novel linear, unbiased estimator to fuse delayed measurements in distributed sensor networks with application to UAV fleet. In: **Itzhack Y. Bar-Itzhack Memorial Symposium on Estimation, Navigation, and Spacecraft Control**. Haifa, Israel: Israeli Association for Automatic Control, 2012. p. 214–232.

CHAGAS, R. A. J.; WALDMANN, J. Observability analysis for the INS error model with GPS/uncalibrated magnetometer aiding. In: **Itzhack Y. Bar-Itzhack Memorial Symposium on Estimation, Navigation, and Spacecraft Control**. Haifa, Israel: Israeli Association for Automatic Control, 2012. p. 606–626.

CHAGAS, R. A. J.; WALDMANN, J. Rao-blackwellized particle filter with vector observations for satellite three-axis attitude estimation and control in a simulated testbed. **SBA Controle & Automação**, v. 23, n. 3, p. 277–293, 2012.

CHUNG, D.; PARK, C. G.; LEE, J. G. Observability analysis of strapdown inertial navigation system using Lyapunov transformation. In: **35th IEEE Conference on Decision and Control**. Kobe, Japan: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1995. p. 23–28.

COATES, M. Distributed particle filters for sensors networks. In: **Workshop on Information Processing in Sensor Networks, 2004**. New York, NY, United States of America: Association for Computing Machinery, 2004. p. 99–107.

DELL'AQUILA, A.; PAPA, S.; SALVATORE, L.; STASI, S. A delayed state kalman filter for on-line estimation of induction motor parameters and rotor flux space vector position. In: **8th Mediterranean Electrotechnical Conference**. Bari, Italy: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1996. v. 1, p. 269–273.

DIAS, S. S.; BRUNO, M. G. S. Cooperative particle filtering for emitter tracking with unknown noise variance. In: **IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2012**. Kyoto, Japan: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2012. p. 2629–2632.

DOUCET, A. **On Sequential Simulated-Based Methods for Bayesian Filtering**. Signal Processing Group, Department of Engineering, University of Cambridge, UK, CUED/F-INFENG/TR.310, 1998.

FARAHMAND, S.; ROUMELIOTIS, S. I.; GIANNAKIS, G. B. Particle filter adaptation for distributed sensors via set membership. In: **IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2010**. Dallas, Texas, Unites States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2010. p. 3374–3377.

FARRELL, J.; BARTH, M. **The global positioning system & Inertial Navigation**. New York, NY, United States of America: McGraw-Hill, 1998.

FELTER, S. C. An overview of decentralized Kalman filter techniques. In: **IEEE Southern Tier Technical Conference, 1990**. Binghamton, New York, United States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1990. p. 79–87.

FERGUNSON, P.; HOW, J. Decentralized estimation algorithms for formation flying spacecraft. In: **AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 2003**. Austin, Texas, United States of America: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.

FERGUNSON, P.; YANG, T.; TILLERSON, M.; HOW, J. New formation flying testbed for analyzing distributed estimation and control architectures. In: **AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 2002**. Monterey, California, United States of America: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002.

GOPOLAKRISHNAN, A.; KAISARE, N. S.; NARASIMHAN, S. Incorporating delayed and infrequent measurements in Extended Kalman filter based nonlinear state estimation. **Journal of Process Control**, v. 21, p. 119–129, 2011.

GOSHEN-MESKIN, D.; BAR-ITZHACK, I. Y. Observability analysis of piece-wise constant systems. I. Theory. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. 28, n. 4, p. 1056–1067, oct 1992.

GOSHEN-MESKIN, D.; BAR-ITZHACK, I. Y. Observability analysis of piece-wise constant systems. II. Application to inertial navigation in-flight alignment [military applications]. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. 28, n. 4, p. 1068–1075, oct 1992.

GOSHEN-MESKIN, D.; BAR-ITZHACK, I. Y. Unified approach to inertial navigation system error modeling. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 15, n. 3, p. 648–653, 1992.

HJORTSMARKER, N. **Experimental system for validating GPS/INS integration algorithms.** Luleå University of Technology: Department of Computer Science and Electrical Engineering, 2005.

HO, Y. C.; LEE, R. C. K. A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 9, p. 333–339, 1964.

HONG, S.; LEE, H. C. M. H.; KWON, S.; SPEYER, J. L. Observability of erros states in GPS/INS integration. **IEEE Transactions on Vehicular Technology**, v. 54, n. 2, p. 731–743, 2005.

HUNGER, R. **Floating Point Operations in Matrix-Vector Calculus**. Technische Universität München, Associate Institute for Signal Processing, Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Utschick, Germany, 2007.

JULIER, S. J.; UHLMANN, K. J. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. In: **11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls**. Orlando, Florida, United States of America: International Society for Optics and Photonics, 1997.

JULIER, S. J.; UHLMANN, K. J. A non-divergent estimation algorithm in the presence of unknown correlations. In: **IEEE American Control Conference, 1997**. Albuquerque, New Mexico, United States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1997. p. 2369–2373.

KAR, S.; CUI, S.; POOR, H. V.; MOURA, J. M. F. Convergence results in distributed Kalman filtering. In: **IEEE American Control Conference, 1997**. Prague, Czech Republic: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2011. p. 2500–2503.

KAR, S.; MOURA, J. M. F. Gossip and distributed Kalman filtering: weak consensus under weak detectability. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 59, n. 4, p. 1766–1784, 2011.

LAPID-MAOZ, J.; BAR-ITZHACK, I. Y. Relative-location determination of cooperating aircraft. In: **AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 2000**. Denver, Colorado, United States of America: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.

LARSEN, T. D.; ANDERSEN, N. A.; RAVN, O.; POULSEN, N. K. Incorporation of time delayed measurements in a discrete-time Kalman filter. In: **37th IEEE Conference on Decision and Control**. Tampa, Florida, United States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1998. p. 3972–3977.

LEE, J.; PARK, C. G.; PARK, H. W. Multiposition alignment of strapdown inertial navigation system. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. 29, n. 4, p. 1323–1328, 1993.

LEE, M. K.; HONG, S.; LEE, M. H.; KWON, S.; CHUN, H. Observability analysis of alignment erros in GPS/INS. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 19, n. 6, p. 1253–1267, 2005.

LEUNG, K. Y. K.; BARFOOT, T. D.; LIU, H. H. T. Decentralized localization of sparsely-communicating robot networks: A cetralized-equivalent approach. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 26, n. 1, p. 62–77, 2010.

LOPES, C. G.; WALDMANN, J. Distributed sensor fusion for aided inertial navigations systems. In: **X Simpósio de Guerra Eletrônica**. São José dos Campos, São Paulo, Brasil: Simpósio de Guerra Eletrônica, 2008.

MAYBECK, P. S. **Stochastic Models, Estimation and Control**. New York, United States of America: Academic Press, 1979.

MOHAMMADI, A.; ASIF, A. Consensus-based distributed unscented particle filter. In: **IEEE Statistical Signal Processing Workshop, 2011**. Nice, Frace: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2011. p. 237–240.

MOHAMMADI, A.; ASIF, A. A consensus/fusion based distributed implementation of the particle filte. In: **4th IEEE International Workshop on Computational Advances in**

Multi-Sensor Adaptive Processing. Nice, Frace: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2012. p. 237–240.

OLFATI-SABER, R. Distributed Kalman filtering for sensor networks. In: **46th IEEE Conference on Decision and Control**. New Orleans, Louisiana, United States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2007. p. 5492–5498.

PAPOULIS, A. **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes**. 3rd. ed. New York, United States of America: McGraw-Hill, 1991.

PARK, J. G.; KIM, J.; LEE, J. G.; PARK, C.; JEE, G.; OH, J. T. The enhancement of INS alignment using GPS measurements. In: **IEEE Position, Location and Navigation Symposium, 1998**. Palm Springs, California, United States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1998. p. 534–540.

PARK, J. G.; LEE, J. G.; PARK, C. G. SDING/GPS in-flight alignment using GPS carrier phase rate. **GPS Solutions**, v. 8, p. 74–81, 2004.

PINSON, J. C. Inertial guidance for cruise vehicles. In: LEONDES, C. T. (Ed.). **Guidance and Control of Aerospace Vehicles**. New York, United States of America: McGraw-Hill, 1963.

QUANBO, G.; CHENGLIN, W. Optimal distributed fusion algorithm with one-step out-of-sequence estimates. **Journal of Electronics (China)**, v. 25, n. 4, p. 529–538, 2008.

QUI, H. Z.; ZHANG, H. Y.; JIN, H. Fusion algorithm of correlated local estimates. **Aerospace Science and Technology**, v. 8, p. 619–629, 2004.

RHEE, I.; ABDEL-HAFEZ, M. F.; SPEYER, J. L. Observability of an integrated GPS/INS during maneuvers. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. 40, n. 2, p. 526–535, 2004.

RIBEIRO, A.; GIANNAKIS, G. B.; ROUMELIOTIS, S. I. SOI-KF: Distributed Kalman filtering with low-cost communications using the sign of innovations. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 54, n. 12, p. 4782–4795, 2006.

RISTIC, B.; ARULAMPALAM, S.; GORDON, N. **Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications**. Boston, United States of America: Artech House, 2004.

ROMERO, J. F. A. **Flux estimation and field oriented control of induction motors.** Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2002.

ROMERO, J. F. A.; HEMERLY, E. M. Convergence analysis of a delayed state kalman filter based deterministic nonlinear observer. In: **XV Congresso Brasileiro de Automática**. Gramado, RS, Brasil: Sociedade Brasileira de Automática, 2004.

ROUMELIOTIS, S. I.; JOHNSON, A. E.; MONTGOMERY, J. F. Augmenting inertial navigation with image-based motion estimation. In: **IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2002**. Washington, DC, United States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2002. p. 4326–4333.

SALYCHEV, O. **Applied Inertial Navigation: Problems and Solutions**. Moscow, Russia: BMSTU Press, 2004.

SAVAGE, P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 1: Attitude algorithms. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 21, n. 1, p. 19–28, 1998.

SAVAGE, P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 2: Velocity and position algorithms. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 21, n. 2, p. 208–211, 1998.

SHUSTER, M.; OH, S. Three-axis attitude determination from vector observations. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 4, n. 1, p. 70–77, 1981.

SMITH, R. S.; HADAEGH, F. Y. A distributed parallel estimation architecture for cooperative vehicle formation control. In: **IEEE Aerospace Conference, 2006**. Big Sky, Montana, United States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2006.

SMITH, R. S.; HADAEGH, F. Y. Parallel estimation and control architectures for deep-space formation flying spacecraft. In: **IEEE Aerospace Conference, 2006**. Big Sky, Montana, United States of America: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2006.

TANG, Y.; WU, Y.; WU, M.; WU, W.; HU, X.; SHEN, L. INS/GPS integration: Global observability analysis. **IEEE Transactions on Vehicular Technology**, v. 58, n. 3, p. 1129–1142, March 2009.

TASOULIS, D. K.; ADAMS, N. M.; HAND, D. J. Selective fusion of out-of-sequence measurements. **Information Fusion**, v. 11, n. 2, p. 183–191, 2010.

UZTEBAY, D.; COATES, M.; RABAT, M. Distributed auxiliary particle filter using selective gossip. In: **IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2011**. Prague, Czech Republic: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2010. p. 3756–3759.

VANVALKENBURG, M. **The Matrix Exponential Function**. 2012. Acessado em: 10 dez. 2012. Disponível em: <http://math.berkeley.edu/~mjv/H54Lec22.pdf>.

WALDMANN, J. In-flight alignment in INS-aiding with switched feedforward/feedback of error estimates. In: **19th Internation Congress of Mechanical Enginering**. Brasília, DF, Brasil: Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas, 2007.

WANG, D.; SHEN, Y. Z. X. Distributed multisensor estimation fusion with out-of-sequence measurements. In: **IEEE International Conference on Embedded Software and Systems, 2008**. Chengdu, Sichuan, China: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2008. p. 390–395.

WEINRED, A.; BAR-ITZHACK, I. Y. The psi-angle error equation in strapdown inertial navigation systems. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. 14, n. 3, p. 539–542, 1979.

XSENS TECHNOLOGIES B.V. **MTi-G User Manual and Technical Documentationz**. Pantheon 6a, P.O. Box 559, 7500 AN Enschede, The Netherlands, July 2008.

ZHANG, K.; LI, X. R.; ZHU, Y. Optimal update with out-of-sequence measurements. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 56, n. 6, p. 1992–2004, 2005.

Apêndice A - Prova da Equação 3.4

Da definição do vetor $\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}$ em 3.2, pode-se calcular

$$E\{\mathbf{y}_{k,i}^{u,em}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} = \begin{bmatrix} E\{\mathbf{y}_{k,\Delta_0,i}^{f,EXT}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} \\ E\{\mathbf{y}_{k,\Delta_1,i}^{f,EXT}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} \\ \vdots \\ E\{\mathbf{y}_{k,\Delta_L,i}^{f,EXT}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} \end{bmatrix} . \tag{A.1}$$

Com isso, utilizando a definição do vetor $\mathbf{y}_{k,\Delta_n,i}^{f,EXT}$ em 3.1, basta observar que

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{y}_{k,\Delta_n,i}^{f,EXT}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} &= E\{\mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i} + \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{v}_{k,\Delta_n,i}^{f}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} = \\ &= \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} + \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + E\{\mathbf{v}_{k,\Delta_n,i}^{f}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} = \\ &= \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f}E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\}, \quad n \in [1,2,\ldots,L] \, , \end{aligned} \tag{A.2}$$

onde foi usado o fato que $\mathbf{v}_{k,\Delta_n,i}^{f}$ possui média 0 e que $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i}$ é determinístico, pois é o estimador do instante k condicionado a todas as medidas disponíveis até o instante $k-1$. Finalmente, substituindo adequadamente A.2 em A.1, prova-se 3.4.

Apêndice B - Prova da Equação 3.8

Da definição de $\mathbf{C}^{xy}_{k,i}$ na equação 3.3, tem-se

$$\mathbf{C}^{xy}_{k,i} = E\{(\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\})(\mathbf{y}^{u,em}_{k,i} - E\{\mathbf{y}^{u,em}_{k,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\})^T|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} \ . \tag{B.1}$$

Prosseguindo, obtém-se com o resultado da equação 3.4

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}^{u,em}_{k,i} - E\{\mathbf{y}^{u,em}_{k,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{f,EXT}_{k,\Delta_0,i} \\ \mathbf{y}^{f,EXT}_{k,\Delta_1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{f,EXT}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}^f_{k,\Delta_0,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{H}^f_{k,\Delta_0,i}E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_0|k-\Delta_0-1,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} \\ \mathbf{H}^f_{k,\Delta_1,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{H}^f_{k,\Delta_1,i}E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_1|k-\Delta_1-1,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^f_{k,\Delta_L,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} + \mathbf{H}^f_{k,\Delta_L,i}E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_L|k-\Delta_L-1,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} \end{bmatrix} \ .
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Das equações 3.1 e 3.5, lembra-se que

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{f,EXT}_{k,\Delta_n,i} = \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\mathbf{x}_{k-\Delta_n} + \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i} + \mathbf{v}^f_{k,\Delta_n,i} \ , \\ E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-\Delta_n-1,i} \ . \end{cases} \tag{B.3}$$

Substituindo, então, B.3 em B.2, segue que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}^{u,em}_{k,i} - E\{\mathbf{y}^{u,em}_{k,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_0,i}(\mathbf{x}_{k-\Delta_0} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_0|k-1,i}) + \mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_0,i} \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_1,i}(\mathbf{x}_{k-\Delta_1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_1|k-1,i}) + \mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_L,i}(\mathbf{x}_{k-\Delta_L} - \hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_L|k-1,i}) + \mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_0,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_0|k-1,i} + \mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_0,i} \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_1,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_1|k-1,i} + \mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_L,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_L|k-1,i} + \mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_L,i} \end{bmatrix} .
\end{aligned} \tag{B.4}
$$

Lembrando que $\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i}\} = \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1,i}$, obtém-se da substituição de B.4 em B.1

$$
\mathbf{C}^{xy}_{k,i} = E\left\{ \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_0,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_0|k-1,i} + \mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_0,i} \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_1,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_1|k-1,i} + \mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_L,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_L|k-1,i} + \mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_L,i} \end{pmatrix}^{T} |\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i} \right\} . \tag{B.5}
$$

E, finalmente, da definição de $\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_n|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})$ obtida da equação 3.6 e das considerações de independência entre o ruído de medida, o estado inicial $\mathbf{x}_0$ e o ruído de modelo, conclui-se que

$$\mathbf{C}_{k,i}^{xy} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_0|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})\mathbf{H}_{k,\Delta_0,i}^{f,T})^T \\ \vdots \\ (\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_n|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})\mathbf{H}_{k,\Delta_n,i}^{f,T})^T \\ \vdots \\ (\tilde{\mathbf{M}}_{k,i}(0;\Delta_L|\boldsymbol{\Omega}_{k-1,i})\mathbf{H}_{k,\Delta_L,i}^{f,T})^T \end{bmatrix}^T . \tag{B.6}$$

Apêndice C - Prova da Equação 3.9

Da definição de $\mathbf{C}^{yy}_{k,i}$ na equação 3.3, tem-se

$$\mathbf{C}^{yy}_{k,i} = E\{(\mathbf{y}^{u,em}_{k,i} - E\{\mathbf{y}^{u,em}_{k,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\})(\mathbf{y}^{u,em}_{k,i} - E\{\mathbf{y}^{u,em}_{k,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\})^T|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\}\ . \tag{C.1}$$

Então, do resultado na equação B.2, obtém-se

$$\mathbf{C}^{yy}_{k,i} = E\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{H}^f_{k,\Delta_0,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_0|k-1,i} + \mathbf{v}^f_{k,\Delta_0,i} \\ \mathbf{H}^f_{k,\Delta_1,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_1|k-1,i} + \mathbf{v}^f_{k,\Delta_1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^f_{k,\Delta_L,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_L|k-1,i} + \mathbf{v}^f_{k,\Delta_L,i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}^f_{k,\Delta_0,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_0|k-1,i} + \mathbf{v}^f_{k,\Delta_0,i} \\ \mathbf{H}^f_{k,\Delta_1,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_1|k-1,i} + \mathbf{v}^f_{k,\Delta_1,i} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^f_{k,\Delta_L,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_L|k-1,i} + \mathbf{v}^f_{k,\Delta_L,i} \end{pmatrix}^T |\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\right\}\ , \tag{C.2}$$

onde o resultado é uma matriz formada por $(L+1)^2$ blocos de matrizes $M \times M$ sendo cada um calculado por

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{yy}_{k,i}(n,m) &= E\{(\mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i} + \mathbf{v}^f_{k,\Delta_n,i}) \cdot (\mathbf{H}^f_{k,\Delta_m,i}\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_m|k-1,i} + \mathbf{v}^f_{k,\Delta_m,i})^T|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \\ &= \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i}\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-\Delta_m|k-1,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\}\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_m,i} + E\{\mathbf{v}^f_{k,\Delta_n,i}\mathbf{v}^{f,T}_{k,\Delta_m,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} + \\ &+ \mathbf{H}^f_{k,\Delta_n,i}E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i}\mathbf{v}^{f,T}_{k,\Delta_m,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} + E\{\mathbf{v}^f_{k,\Delta_n,i}\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-\Delta_m|k-1,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\}\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_m,i} = \\ &= \hat{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_n;\Delta_m|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}) + E\{\mathbf{v}^f_{k,\Delta_n,i}\mathbf{v}^{f,T}_{k,\Delta_m,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\}\ , \end{aligned} \tag{C.3}$$

em que se utilizou o fato que $E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i}\mathbf{v}^{f,T}_{k,\Delta_m,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \mathbf{0}_{M\times M}$ devido às considerações de independência entre o ruído de medição, o estado inicial $\mathbf{x}_0$ e o ruído de modelagem. Finalmente, pode-se escrever

$$\mathbf{C}^{yy}_{k,i}(n,m) = \begin{cases} \hat{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_n;\Delta_m|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}) + \mathbf{R}^{f}_{k,\Delta_n,i} & ,n = m\ , \\ \hat{\mathbf{M}}_{k,i}(\Delta_n;\Delta_m|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}) & ,n \neq m\ , \end{cases} \tag{C.4}$$

pois $E\{\mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_n,i}\mathbf{v}^{f,T}_{k,\Delta_m,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = E\{\mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_n,i}\mathbf{v}^{f,T}_{k,\Delta_m,i}\} = \mathbf{R}^{f}_{k,\Delta_n,i}\cdot\delta(n-m)$.

Concluindo, com o resultado das sub-matrizes em C.4 para $0 \leq n \leq L$ e $0 \leq m \leq L$, onde $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, e observando que $\mathbf{C}^{yy}_{k,i}(n,m) = \mathbf{C}^{yy}_{k,i}(m,n)^T$, pode-se montar a matriz $\mathbf{C}^{yy}_{k,i}$ fornecendo o resultado expresso na equação 3.9.

Apêndice D - Prova da Equação 3.23

Adotando que, em todo o passo de atualização do filtro de Kalman no i-ésimo nó, a medida utilizada pode ser escrita como

$$\mathbf{y}_{k,i}^{u,em} = \mathbf{H}_{k,i}^{u,em}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{k,i}^{u,em} \,, \tag{D.1}$$

com $\mathbf{v}_{k,i}^{u,em}$ sendo uma sequencia ruidosa branca independente do ruído de modelo, obtém-se da equação de atualização e predição do filtro de Kalman

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i} &= \mathbf{F}_{k-n-1}(\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k-n-1,i}\mathbf{H}_{k-n-1,i}^{u,em})\tilde{\mathbf{x}}_{k-n-1|k-n-2,i} + \\ &+ \mathbf{G}_{k-n-1}\mathbf{w}_{k-n-1} + \mathbf{F}_{k-n-1}\mathbf{K}_{k-n-1,i}\mathbf{v}_{k-n-1,i}^{u,em} \,.\end{aligned} \tag{D.2}$$

Repetindo esse processo, mostra-se por indução que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i} &= \left[\prod_{j=0}^{m-n-1}\mathbf{F}_{k-n-1-j}\left(\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k-n-1-j,i}\mathbf{H}_{k-n-1-j,i}^{u,em}\right)\right]\tilde{\mathbf{x}}_{k-m|k-m-1,i} + \\ &+ \mathbf{f}(\mathbf{w}_{k-n-1}, \mathbf{w}_{k-n-2}, \cdots, \mathbf{w}_{k-m}) + \mathbf{g}(\mathbf{v}_{k-n-1,i}^{u,em}, \mathbf{v}_{k-n-2,i}^{u,em}, \cdots, \mathbf{v}_{k-m,i}^{u,em}) \,,\end{aligned} \tag{D.3}$$

onde $m > n$ e $\mathbf{f}(.)$ e $\mathbf{g}(.)$ são, respectivamente, funções lineares dos ruídos de modelo e medição entre os instantes $k-n-1$ e $k-m$. Dessa forma, utilizando as propriedades do operador esperança, obtém-se

$$
\begin{aligned}
&E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i}\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|k-m-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}\} = \\
&= \left[\prod_{j=0}^{m-n-1}\mathbf{F}_{k-n-1-j}\left(\mathbf{I}_{M\times M}-\mathbf{K}_{k-n-1-j,i}\mathbf{H}^{u,em}_{k-n-1-j,i}\right)\right]\cdot \\
&\quad \cdot E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-m|k-m-1,i}\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|k-m-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}\}+ \\
&\quad + E\{\mathbf{f}(\mathbf{w}_{k-n-1},\mathbf{w}_{k-n-2},\cdots,\mathbf{w}_{k-m})\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|k-m-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}\}+ \\
&\quad + E\{\mathbf{g}(\mathbf{v}^{u,em}_{k-n-1,i},\mathbf{v}^{u,em}_{k-n-2,i},\cdots,\mathbf{v}^{u,em}_{k-m,i})\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|k-m-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}\}\ .
\end{aligned}
\tag{D.4}
$$

Note que, devido à suposição que o estado segue uma cadeia de Markov de primeira ordem segundo o modelamento em 2.3, $\tilde{\mathbf{x}}_{k-m|k-m-1,i}$ é uma variável aleatória que depende de $\mathbf{x}_0$, de todas as medidas no conjunto $\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}$ e da sequência de ruídos de modelo entre os instantes 0 e $k-m-1$. Logo, $\tilde{\mathbf{x}}_{k-m|k-m-1,i}$ é independente de $\mathbf{w}_{k-n-1},\mathbf{w}_{k-n-2},\cdots,\mathbf{w}_{k-m}$ e de $\mathbf{v}^{u,em}_{k-n-1,i},\mathbf{v}^{u,em}_{k-n-2,i},\cdots,\mathbf{v}^{u,em}_{k-m,i}$ (LARSEN *et al.*, 1998), ou seja,

$$
\begin{aligned}
&E\{\mathbf{f}(\mathbf{w}_{k-n-1},\mathbf{w}_{k-n-2},\cdots,\mathbf{w}_{k-m})\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|k-m-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}\} = \\
&\quad = \underbrace{E\{\mathbf{f}(\mathbf{w}_{k-n-1},\mathbf{w}_{k-n-2},\cdots,\mathbf{w}_{k-m})|\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}\}}_{\mathbf{0}_{M\times 1}}E\{\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|k-m-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}\} = \mathbf{0}_{M\times M}\ , \\
&E\{\mathbf{g}(\mathbf{v}^{u,em}_{k-n-1,i},\mathbf{v}^{u,em}_{k-n-2,i},\cdots,\mathbf{v}^{u,em}_{k-m,i})\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|k-m-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}\} = \\
&\quad = \underbrace{E\{\mathbf{g}(\mathbf{v}^{u,em}_{k-n-1,i},\mathbf{v}^{u,em}_{k-n-2,i},\cdots,\mathbf{v}^{u,em}_{k-m,i})|\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}\}}_{\mathbf{0}_{M\times 1}}E\{\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|k-m-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}\} = \mathbf{0}_{M\times M}\ .
\end{aligned}
\tag{D.5}
$$

Na sequência, claramente $E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-m|k-m-1,i}\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|k-m-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}\} = \mathbf{P}_{k-m|k-m-1,i}$. Assim, pode-se escrever que

$$
\begin{aligned}
&E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k-n|k-n-1,i}\tilde{\mathbf{x}}^T_{k-m|k-m-1,i}|\boldsymbol{\Omega}_{k-m-1,i}\} = \\
&= \left[\prod_{j=0}^{m-n-1}\mathbf{F}_{k-n-1-j}\left(\mathbf{I}_{M\times M}-\mathbf{K}_{k-n-1-j,i}\mathbf{H}^{u,em}_{k-n-1-j,i}\right)\right]\mathbf{P}_{k-m|k-m-1,i}\ .
\end{aligned}
\tag{D.6}
$$

Observe que se o nó i recebeu medidas atrasadas em um determinado instante $k-t$, logo, pela equação 3.15, se pode aproximar

$$\mathbf{H}^{u,em}_{k-t,i} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{f,T}_{k-t,\Delta_0,i} & \cdots & \mathbf{H}^{f,T}_{k-t,\Delta_L,i} \end{bmatrix}^T \tag{D.7}$$

e, finalmente, o cálculo da matriz $\mathbf{M}(n,m)$ pode ser feito por

$$\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m) = \begin{cases} \left[\prod_{j=0}^{m-n-1} \mathbf{F}_{k-n-1-j} \left(\mathbf{I}_{M\times M} - \mathbf{K}_{k-n-1-j,i} \cdot \right. \right. & \\ \left. \left. \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{f,T}_{k-n-1-j,\Delta_0,i} & \cdots & \mathbf{H}^{f,T}_{k-n-1-j,\Delta_L,i} \end{bmatrix}^T \right) \right] \cdot \mathbf{P}_{k-m|k-m-1,i} & , \; m > n \;, \\ \bar{\mathbf{M}}^T_{k,i}(m;n) & , \; m < n \;, \\ \mathbf{P}_{k-n|k-n-1,i} & , \; m = n \;, \end{cases} \tag{D.8}$$

o que prova a equação 3.23.

Deve-se observar que o cálculo da matriz $\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m)$ é exato até o recebimento da primeira medida atrasada. Quando isso ocorrer, a afirmação em D.1 não é mais válida. Entretanto, o método de extrapolação de medidas, através de 3.1, tenta fazer com que o vetor de medidas atrasadas possa ser aproximado de tal forma que

$$\mathbf{y}^{u,em}_{k,i} \approx \mathbf{H}^{u,em}_{k,i}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}^{u,em}_{k,i} \;, \tag{D.9}$$

o que permite que o cálculo da matriz $\bar{\mathbf{M}}_{k,i}(n;m)$ conforme mostrado forneça uma aproximação do valor real.

Apêndice E - Prova da Equação 3.28

Por indução, pode-se mostrar que o estado $\mathbf{x}_{k-n}$ se relaciona com o estado $\mathbf{x}_k$ através de

$$\mathbf{x}_{k-n} = \\ = \left[\prod_{l=0}^{n-1} \mathbf{F}_{k-(n-l)}^{-1}\right] \mathbf{x}_k - \sum_{j=1}^{n} \left(\left[\prod_{l=0}^{n-j} \mathbf{F}_{k-(n-l)}^{-1}\right] \mathbf{B}_{k-j} \mathbf{u}_{k-j} \right) - \sum_{j=1}^{n} \left(\left[\prod_{l=0}^{n-j} \mathbf{F}_{k-(n-l)}^{-1}\right] \mathbf{G}_{k-j} \mathbf{w}_{k-j} \right) . \tag{E.1}$$

para $n > 0$. Na sequência, lembre que

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i} = E\{\mathbf{x}_{k-\Delta_n} | \mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} . \tag{E.2}$$

Então, utilizando E.1 e as propriedade do operador $E\{.\}$, obtém-se

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i} = \\ &= E\left\{ \left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1} \mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}\right] \mathbf{x}_k - \sum_{j=1}^{\Delta_n} \left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j} \mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}\right] \mathbf{B}_{k-j} \mathbf{u}_{k-j} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{\Delta_n} \left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j} \mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}\right] \mathbf{G}_{k-j} \mathbf{w}_{k-j} \right) |\mathbf{\Omega}_{k-1,i} \right\} = \\ &= \left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1} \mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}\right] E\{\mathbf{x}_k | \mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} - \sum_{j=1}^{\Delta_n} \left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j} \mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}\right] E\{\mathbf{B}_{k-j} \mathbf{u}_{k-j} | \mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} \right) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\Delta_n} \left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j} \mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}\right] E\{\mathbf{G}_{k-j} \mathbf{w}_{k-j} | \mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} \right) . \end{aligned} \tag{E.3}$$

Prosseguindo, como os vetores de controle $\mathbf{B}_k\mathbf{u}_k$ foram supostos determinísticos e conhecidos $\forall k$ e o ruído de modelo $\mathbf{G}_k\mathbf{w}_k$ foi suposto ter média $\mathbf{0}_{M\times 1}$ $\forall k$, pode-se escrever

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i} = \left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1} \mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}\right]\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \sum_{j=1}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j} \mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}\right]\mathbf{B}_{k-j}\mathbf{u}_{k-j}\right) . \tag{E.4}$$

Além disso, se $\Delta_n = 0$, deve-se ter

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} . \tag{E.5}$$

Finalmente, chamando

$$\mathbf{F}_{\Delta_n}^{*} \triangleq \begin{cases} \prod_{l=0}^{\Delta_n-1} \mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}, & \Delta_n \neq 0 , \\ \mathbf{I}_{M\times M}, & \Delta_n = 0 , \end{cases} \tag{E.6}$$

$$\mathbf{u}_{\Delta_n}^{*} \triangleq \begin{cases} \sum_{j=1}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j} \mathbf{F}_{k-(\Delta_n-l)}^{-1}\right]\mathbf{B}_{k-j}\mathbf{u}_{k-j}\right), & \Delta_n \neq 0 , \\ \mathbf{0}_{M\times 1}, & \Delta_n = 0 , \end{cases} \tag{E.7}$$

se conclui que

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-\Delta_n|k-1,i} = \mathbf{F}_{\Delta_n}^{*}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1,i} - \mathbf{u}_{\Delta_n}^{*} \tag{E.8}$$

e o resultado em 3.28 está provado.

Apêndice F - Prova das Equações 3.52, 3.53 e 3.54

Primeiramente, considere o ruído de medição da medida transportada:

$$\mathbf{v}^{p}_{k,n,i} \triangleq \mathbf{v}^{f}_{k,n,i} - \mathbf{H}^{f}_{k,n,i} \sum_{j=1}^{n} \left(\left[\prod_{l=0}^{n-j} \mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)} \right] \mathbf{G}_{k-j} \mathbf{w}_{k-j} \right) , \tag{F.1}$$

onde $n \in [\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_L]$. Dessa forma, considerando o caso em que $n \geq 1$ e $m \geq 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
&E\{\mathbf{v}^{p}_{k,n,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,m,i}\} = \\
&= E\left\{ \left(\mathbf{v}^{f}_{k,n,i} - \mathbf{H}^{f}_{k,n,i} \sum_{j=1}^{n} \left(\left[\prod_{l=0}^{n-j} \mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)} \right] \mathbf{G}_{k-j} \mathbf{w}_{k-j} \right) \right) \cdot \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(\mathbf{v}^{f}_{k,m,i} - \mathbf{H}^{f}_{k,m,i} \sum_{h=1}^{m} \left(\left[\prod_{l=0}^{m-h} \mathbf{F}^{-1}_{k-(m-l)} \right] \mathbf{G}_{k-h} \mathbf{w}_{k-h} \right) \right)^{T} \right\} = \\
&= E\{\mathbf{v}^{f}_{k,n,i}\mathbf{v}^{f,T}_{k,m,i}\} - E\left\{ \mathbf{v}^{f}_{k,n,i} \sum_{h=1}^{m} \left(\mathbf{w}^{T}_{k-h} \mathbf{G}^{T}_{k-h} \left[\prod_{l=0}^{m-h} \mathbf{F}^{-1}_{k-(m-l)} \right]^{T} \right) \mathbf{H}^{f,T}_{k,m,i} \right\} - \\
&\quad - E\left\{ \mathbf{H}^{f}_{k,n,i} \sum_{j=1}^{n} \left(\left[\prod_{l=0}^{n-j} \mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)} \right] \mathbf{G}_{k-j} \mathbf{w}_{k-j} \right) \mathbf{v}^{f,T}_{k,m,i} \right\} + \\
&\quad + E\left\{ \mathbf{H}^{f}_{k,n,i} \sum_{j=1}^{n} \left(\left[\prod_{l=0}^{n-j} \mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)} \right] \mathbf{G}_{k-j} \mathbf{w}_{k-j} \right) \cdot \right. \\
&\qquad \left. \cdot \sum_{h=1}^{m} \left(\mathbf{w}^{T}_{k-h} \mathbf{G}^{T}_{k-h} \left[\prod_{l=0}^{m-h} \mathbf{F}^{-1}_{k-(m-l)} \right]^{T} \right) \mathbf{H}^{f,T}_{k,m,i} \right\} .
\end{aligned} \tag{F.2}$$

Utilizando as propriedades do operador $E\{.\}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&E\{\mathbf{v}^{p}_{k,n,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,m,i}\} = \\
&= E\{\mathbf{v}^{f}_{k,n,i}\mathbf{v}^{f,T}_{k,m,i}\} - \sum_{h=1}^{m}\left(E\{\mathbf{v}^{f}_{k,n,i}\mathbf{w}^{T}_{k-h}\mathbf{G}^{T}_{k-h}\}\left[\prod_{l=0}^{m-h}\mathbf{F}^{-1}_{k-(m-l)}\right]^{T}\right)\mathbf{H}^{f,T}_{k,m,i} - \\
&- \mathbf{H}^{f}_{k,n,i}\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]E\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{v}^{f,T}_{k,m,i}\}\right) + \\
&+ E\left\{\mathbf{H}^{f}_{k,n,i}\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\right)\cdot\right. \\
&\quad\left.\cdot\sum_{h=1}^{m}\left(\mathbf{w}^{T}_{k-h}\mathbf{G}^{T}_{k-h}\left[\prod_{l=0}^{m-h}\mathbf{F}^{-1}_{k-(m-l)}\right]^{T}\right)\mathbf{H}^{f,T}_{k,m,i}\right\}.
\end{aligned} \tag{F.3}$$

Pelas considerações de independência entre os ruídos de sensores e o ruído de modelagem, claramente, $E\{\mathbf{v}^{f}_{k,n,i}\mathbf{w}^{T}_{k-h}\mathbf{G}^{T}_{k-h}\} = \mathbf{0}_{M\times M}$ e $E\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{v}^{f,T}_{k,m,i}\} = \mathbf{0}_{M\times M}$, $\forall j \in [1,2,\ldots,n]$ e $\forall h \in [1,2,\ldots,m]$. Dessa forma, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
&E\{\mathbf{v}^{p}_{k,n,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,m,i}\} = E\{\mathbf{v}^{f}_{k,n,i}\mathbf{v}^{f,T}_{k,m,i}\} + \\
&\quad + \mathbf{H}^{f}_{k,n,i}E\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{m}\left(\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{w}^{T}_{k-h}\mathbf{G}^{T}_{k-h}\left[\prod_{l=0}^{m-h}\mathbf{F}^{-1}_{k-(m-l)}\right]^{T}\right)\right\}\mathbf{H}^{f,T}_{k,m,i} = \\
&= E\{\mathbf{v}^{f}_{k,n,i}\mathbf{v}^{f,T}_{k,m,i}\} + \\
&\quad + \mathbf{H}^{f}_{k,n,i}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{m}\left(\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]E\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{w}^{T}_{k-h}\mathbf{G}^{T}_{k-h}\}\left[\prod_{l=0}^{m-h}\mathbf{F}^{-1}_{k-(m-l)}\right]^{T}\right)\right]\mathbf{H}^{f,T}_{k,m,i}.
\end{aligned} \tag{F.4}$$

Devido às considerações de independência temporal no ruído de modelagem, tem-se que $E\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{w}^{T}_{k-h}\mathbf{G}^{T}_{k-h}\} = \mathbf{Q}_{k-j}\delta(j-h)$, onde $\delta(.)$ é o delta de Kronecker. Em outras palavras, esse valor é apenas diferente de $\mathbf{0}_{M\times M}$ quando $j = h$. Também pelas considerações de independência entre os ruídos de sensores, sabe-se que $E\{\mathbf{v}^{f}_{k,n,i}\mathbf{v}^{f,T}_{k,m,i}\} = \mathbf{R}^{f}_{k,n,i}\delta(n-m)$. Dessa forma, a expressão em F.4 é simplificada para:

$$
\begin{aligned}
&E\{\mathbf{v}^{p}_{k,n,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,m,i}\} = \\
&= \mathbf{R}^{f}_{k,n,i}\delta(n-m) + \mathbf{H}^{f}_{k,n,i}\left[\sum_{j=1}^{min(n,m)}\left(\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]\mathbf{Q}_{k-j}\left[\prod_{l=0}^{m-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(m-l)}\right]^{T}\right)\right]\mathbf{H}^{f,T}_{k,m,i}\;.
\end{aligned}
\tag{F.5}
$$

Conclui-se que, para $n < m$

$$
E\{\mathbf{v}^{p}_{k,n,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,m,i}\} = \mathbf{H}^{f}_{k,n,i}\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]\mathbf{Q}_{k-j}\left[\prod_{l=0}^{m-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(m-l)}\right]^{T}\right)\mathbf{H}^{T,f}_{k,m,i}\;, \tag{F.6}
$$

para $m = n$

$$
E\{\mathbf{v}^{p}_{k,n,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,m,i}\} = \mathbf{R}^{f}_{k,n,i} + \mathbf{H}^{f}_{k,n,i}\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]\mathbf{Q}_{k-j}\left[\prod_{l=0}^{n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(n-l)}\right]^{T}\right)\mathbf{H}^{T,f}_{k,n,i} \tag{F.7}
$$

e, finalmente, para $n > m$

$$
E\{\mathbf{v}^{p}_{k,n,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,m,i}\} = E\{\mathbf{v}^{p}_{k,m,i}\mathbf{v}^{p,T}_{k,n,i}\}^{T}\;, \tag{F.8}
$$

onde o resultado pode ser obtido utilizando F.6.

Apêndice G - Prova da Equação 3.66 e 3.67

Primeiramente, considere o ruído de medição da medida transportada se $\Delta_n \neq 0$:

$$\mathbf{v}^{p}_{k,\Delta_n,i} \triangleq \mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_n,i} - \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i} \sum_{h=1}^{\Delta_n} \left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n - h} \mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n - l)} \right] \mathbf{G}_{k-h} \mathbf{w}_{k-h} \right) , \tag{G.1}$$

onde $n \in [0, 1, 2, \cdots, L]$.

Além disso, o resultado na equação 3.65 fornece:

$$\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k\} = \left[\prod_{t=1}^{k} \mathbf{F}_{k-t} \right] (\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0) + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} + \sum_{j=2}^{k} \left(\left[\prod_{t=1}^{j-1} \mathbf{F}_{k-t} \right] \mathbf{G}_{k-j} \mathbf{w}_{k-j} \right) . \tag{G.2}$$

Dessa forma, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & E\{(\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k\})\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_n,i} | \mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \\ & = E\left\{ \left(\left[\prod_{t=1}^{k} \mathbf{F}_{k-t} \right] (\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0) + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} + \sum_{j=2}^{k} \left(\left[\prod_{t=1}^{j-1} \mathbf{F}_{k-t} \right] \mathbf{G}_{k-j} \mathbf{w}_{k-j} \right) \right) \mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_n,i} | \mathbf{\Omega}_{k-1,i} \right\} . \end{aligned} \tag{G.3}$$

Utilizando as propriedades do operador $E\{.\}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} &E\{(\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k\})\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_n,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \\ &= \left[\prod_{t=1}^{k}\mathbf{F}_{k-t}\right] E\{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0)\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_n,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} + E\{\mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_n,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} + \\ &+ \sum_{j=2}^{k}\left(\left[\prod_{t=1}^{j-1}\mathbf{F}_{k-t}\right] E\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_n,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\}\right) . \end{aligned} \tag{G.4}$$

Como é suposto que o estado inicial $\mathbf{x}_0$ é independente de todos os ruídos de modelagem e dos sensores, claramente $E\{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0)\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_n,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \mathbf{0}_{M\times M}$. Adicionalmente, utilizando a equação G.1, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} &E\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_n,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \\ &= E\left\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\left(\mathbf{v}^{f}_{k,\Delta_n,i} - \mathbf{H}^{f}_{k,\Delta_n,i}\sum_{h=1}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-h}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]\mathbf{G}_{k-h}\mathbf{w}_{k-h}\right)\right)^T |\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\right\} = \\ &= E\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{v}^{f,T}_{k,\Delta_n,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} - \\ &- \sum_{h=1}^{\Delta_n}\left(E\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{w}^T_{k-h}\mathbf{G}^T_{k-h}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-h}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]^T\right)\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_n,i} . \end{aligned} \tag{G.5}$$

Mais uma vez, devido às considerações de independência entre o ruído de modelo e o ruído dos sensores, tem-se $E\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{v}^{f,T}_{k,\Delta_n,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \mathbf{0}_{M\times M}$. Adicionalmente, como o ruído de modelo não depende de nenhuma medida:

$$E\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{w}^T_{k-h}\mathbf{G}^T_{k-h}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = E\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{w}^T_{k-h}\mathbf{G}^T_{k-h}\} . \tag{G.6}$$

Prosseguindo, sabe-se que o ruído de modelo $\mathbf{G}_k\mathbf{w}_k$, $k \in \mathbb{N}$, foi assumido como uma sequência branca. Dessa forma, $E\{\mathbf{G}_n\mathbf{w}_n\mathbf{w}^T_m\mathbf{G}^T_m\} = \mathbf{Q}_n \cdot \delta(n-m)$. Portanto, esses resultados fornecem:

$$E\{\mathbf{G}_{k-j}\mathbf{w}_{k-j}\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_n,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = -\sum_{h=1}^{\Delta_n}\left(\mathbf{Q}_{k-j}\cdot\delta(h-j)\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-h}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]^T\right)\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_n,i}\ . \tag{G.7}$$

Dessa forma, utilizando esses resultados na equação G.4, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&E\{(\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k\})\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_n,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \\
&= -\left(\mathbf{Q}_{k-1}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]^T\right)\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_n,i} - \\
&\quad -\sum_{j=2}^{k}\left(\left[\prod_{t=1}^{j-1}\mathbf{F}_{k-t}\right]\sum_{h=1}^{\Delta_n}\left(\mathbf{Q}_{k-j}\cdot\delta(h-j)\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-h}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]^T\right)\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_n,i}\right) = \\
&= -\left(\mathbf{Q}_{k-1}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]^T\right)\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_n,i} - \\
&\quad -\sum_{j=2}^{k}\left(\sum_{h=1}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{t=1}^{j-1}\mathbf{F}_{k-t}\right]\mathbf{Q}_{k-j}\cdot\delta(h-j)\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-h}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]^T\right)\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_n,i}\right) = \\
&= -\left(\mathbf{Q}_{k-1}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]^T\right)\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_n,i} - \\
&\quad -\sum_{j=2}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{t=1}^{j-1}\mathbf{F}_{k-t}\right]\mathbf{Q}_{k-j}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]^T\right)\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_n,i} = \\
&= \left\{-\mathbf{Q}_{k-1}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-1}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]^T - \sum_{j=2}^{\Delta_n}\left(\left[\prod_{t=1}^{j-1}\mathbf{F}_{k-t}\right]\mathbf{Q}_{k-j}\left[\prod_{l=0}^{\Delta_n-j}\mathbf{F}^{-1}_{k-(\Delta_n-l)}\right]^T\right)\right\}\mathbf{H}^{f,T}_{k,\Delta_n,i}\ ,
\end{aligned} \tag{G.8}$$

o que prova a equação 3.66.

Se $\Delta_0 = 0$, então $\mathbf{v}^p_{k,\Delta_0,i} = \mathbf{v}^f_{k,\Delta_0,i}$ e, devido à independência entre os ruídos de modelagem, os ruídos de medida e o estado inicial, obtém-se:

$$E\{(\mathbf{x}_k - E\{\mathbf{x}_k\})\mathbf{v}^{p,T}_{k,\Delta_0,i}|\mathbf{\Omega}_{k-1,i}\} = \mathbf{0}_{M\times M}\ , \tag{G.9}$$

o que prova a equação 3.67.

Apêndice H - Trajetória e Movimento Angular dos VANTs nas Simulações

A trajetória de cada VANT nas simulações é composta de vários segmentos nos quais a força específica permanece constante. Eles estão descritos na tabela H.1, em que g é a gravidade local e $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são variáveis aleatórias com distribuição uniforme no intervalo $[-3, 3]$ m/s^2. Estas são amostradas no início de cada realização para cada um dos VANTs.

TABELA H.1 – Trajetória dos VANTs

		Forças específicas		
Início (s)	**Fim** (s)	**N** (m/s^2)	**E** (m/s^2)	**D** (m/s^2)
0	30	0	0	-g
30	70	$\mathcal{A}_1$	0	-g
70	110	0	$\mathcal{A}_1$	-g
110	150	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_1$	-g
150	190	0	0	-g-$\mathcal{A}_1$
190	240	0	0	-g
240	280	-$\mathcal{A}_1$	0	-g
280	320	0	-$\mathcal{A}_1$	-g
320	360	0	$\mathcal{A}_2$	-g
360	400	0	0	-g+$\mathcal{A}_2$

A atitude da IMU se desenvolve de acordo com

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= 0.1 \sin\left(2\pi\frac{t}{300}\right) + 0.05 \sin\left(2\pi\frac{t}{1.7}\right) + 0.2 \text{ rad} ,\\
\theta(t) &= 0.1 \sin\left(2\pi\frac{t}{300}\right) + 0.05 \sin\left(2\pi\frac{t}{1.7}\right) - 0.4 \text{ rad} ,\\
\phi(t) &= 0.1 \sin\left(2\pi\frac{t}{300}\right) + 0.05 \sin\left(2\pi\frac{t}{0.85}\right) + 0.5 \text{ rad} ,
\end{aligned} \tag{H.1}$$

onde $\psi(t)$, $\theta(t)$ e $\phi(t)$ são os ângulo de Euler que transformam o sistema de coordenadas local para o sistema do corpo segundo uma ordem de rotação ZYX (yaw, pitch e roll).

Deve-se observar, conforme comentado na seção 6.8, que essa trajetória e movimento angular fará com que todos os componentes do vetor de estado no modelo de erros do INS sejam observáveis (CHAGAS; WALDMANN, 2012c).

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO	2. DATA	3. DOCUMENTO Nº	4. Nº DE PÁGINAS
TD	07 de dezembro de 2012	DCTA/ITA/TD-026/2012	193

5. TÍTULO E SUBTÍTULO:

Estimação distribuída de erros em sistemas de navegação inercial auxiliada

6. AUTOR(ES):

Ronan Arraes Jardim Chagas

7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES):

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA / Divisão de Engenharia Eletrônica

8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR:

Estimação distribuída; Medidas atrasadas; Sistemas de navegação; Filtragem de Kalman; Processamento estatístico de sinais.

9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO:

Navegação inercial; Algoritmos; Sensores; Fusão de multisensor; Processamento de sinais; Análise de erros; Sistemas de navegação por satélite; Filtros de Kalman; Engenharia aeronáutica.

10. APRESENTAÇÃO: **(X) Nacional** **( ) Internacional**

ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica e Computação. Área de Sistemas e Controle. Orientador: Prof. Dr. Jacques Waldmann. Defesa em 13/11/2012. Publicada em 2012.

11. RESUMO:

Uma rede de sensores distribuídos estimando processos dinâmicos pode atingir um nível de robustez maior na operação. Nesse cenário, se um determinado nó apresentar falhas, as informações oriundas da rede poderão impedir a degradação significativa ou a interrupção do processo de estimação. A literatura científica possui um desenvolvimento vasto em algoritmos para fundir informações em uma rede de sensores na qual cada nó está observando o mesmo processo dinâmico. Também existem alguns desenvolvimentos para fundir essas informações quando a comunicação ocorre com atrasos. Entretanto, no melhor conhecimento do autor, ainda não foram desenvolvidos algoritmos para realizar estimação distribuída quando os nós observam processos diferentes, mas relacionados entre si, em redes cuja comunicação envolve atrasos. Aplicações interessantes fazem parte desse tipo de cenário, como, por exemplo, a estimação dos respectivos erros de navegação e dos sensores em cada um dos sistemas de navegação embarcados em veículos aéreos não-tripulados (VANTs) voando em formação e munidos de algum dispositivo de comunicação. Dessa forma, esse trabalho buscou desenvolver técnicas para fundir medidas atrasadas em redes de sensores nas quais os nós não compartilham o mesmo modelo dinâmico. Dois novos algoritmos sub-ótimos foram propostos: a extrapolação de medidas e o transporte de medidas. Estes foram comparados com uma abordagem clássica de fusão de medidas atrasadas em um filtro de Kalman, que é ótima por construção, e que foi adaptada para o problema distribuído em questão. Num primeiro momento, os algoritmos foram analisados de maneira teórica, calculando-se a performance esperada, a necessidade de memória e a carga computacional baseada no número de operações de ponto flutuante. Logo após, os algoritmos foram testados em um exemplo numérico simplificado para uma primeira validação. Então, uma rede de VANTs simulados foi construída e foi considerado que os veículos trocam, com atraso, as medidas dos sensores GNSS aliadas com uma informação da posição relativa entre as aeronaves. Os dois algoritmos desenvolvidos foram comparados com a abordagem ótima e seus respectivos desempenhos e cargas computacionais foram numericamente aferidos. Concluiu-se que, para fins práticos, os métodos sub-ótimos fundem apropriadamente as medidas atrasadas, limitando os erros de navegação, e apresentam carga computacional significativamente menor do que o método ótimo. A performance da extrapolação de medidas se mostrou bastante degradada quando o atraso na troca de informações é alto. Já o transporte de medidas obteve performance muito similar à abordagem clássica em todos os cenários simulados. Dessa forma, a investigação indica que os métodos desenvolvidos apresentam uma melhor razão custo/benefício com respeito à abordagem ótima para a aplicação mencionada, tanto em cenários com atrasos pequenos como em situações com atrasos grandes.

12. GRAU DE SIGILO:

(X) OSTENSIVO **( ) RESERVADO** **( ) CONFIDENCIAL** **( ) SECRETO**